Uncertainty dimension under coordinate transformations in relativistic chaotic scattering

Doctorando Diego S. Fernández.

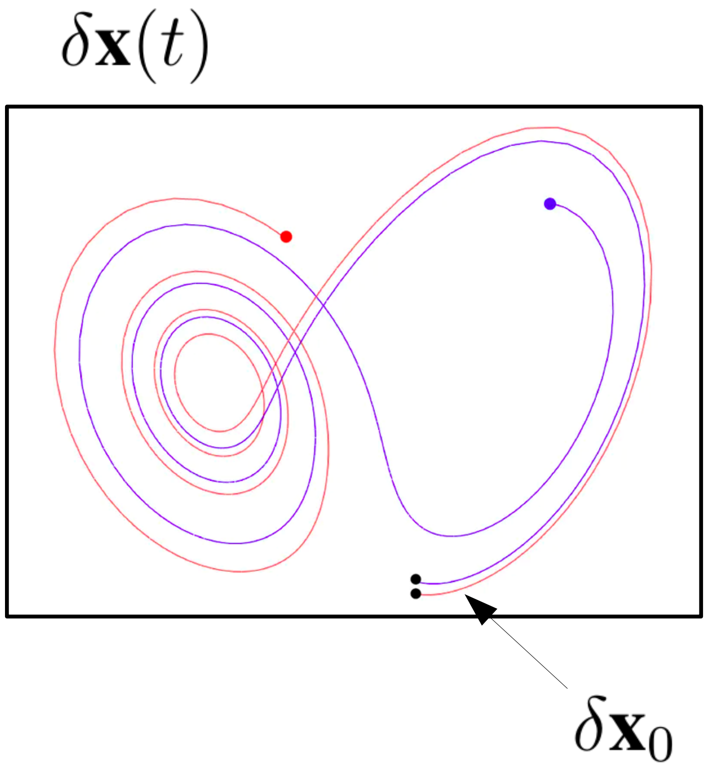
Dirigido por Álvaro G. López, Jesús M. Seoane, Miguel A. F. Sanjuán.

12 de diciembre de 2019.

Nonlinear Dynamics, Chaos and Complex Systems Group.
Departamento de Física, Universidad Rey Juan Carlos.

Universidad Rey Juan Carlos

Un sistema dinámico caótico.



- **Divergencia exponencial** de trayectorias cercanas:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \delta\mathbf{x}_0 e^{h_t t}$$

Si $h_t > 0$ el sistema es caótico.

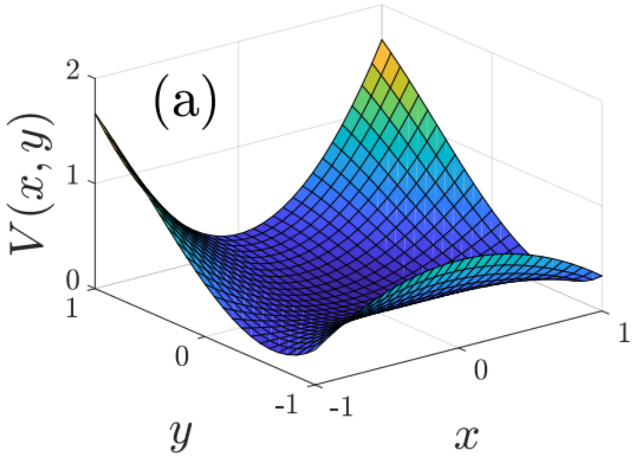
- **Transformación de coordenadas** (Lorentz):

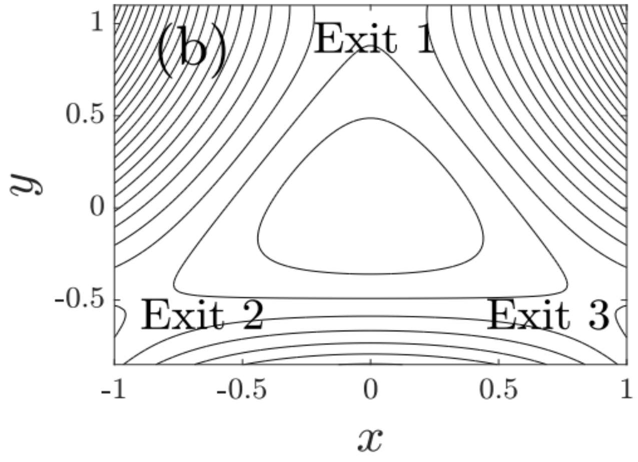
$$d\tau = dt/\gamma(t) \qquad h_\tau = \langle\gamma(t)\rangle h_t > 0$$

El **caos** es una **propiedad intrínseca** del sistema.

Indicadores de caos:
Signo de los exponentes de Lyapunov.
Dimensión de incertidumbre: teórica y computacional.

¿Qué efecto tiene una transformación de coordenadas en la **dimensión de incertidumbre**?





Hamiltoniano **conservativo abierto**.

$$H = \gamma m c^2 + V(x, y)$$

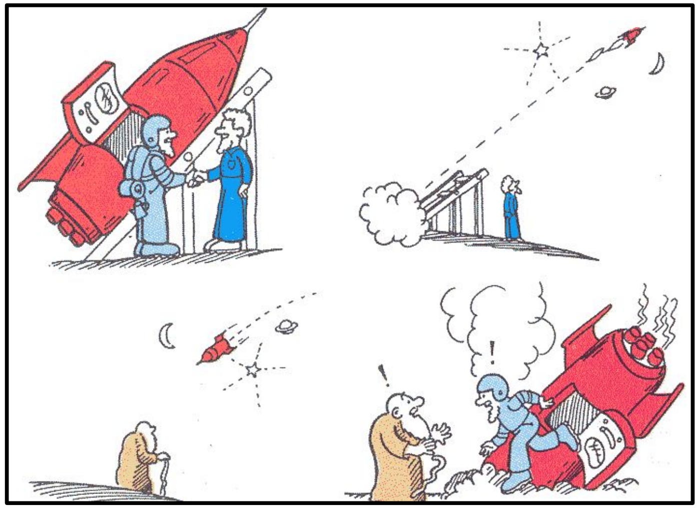
El **factor de Lorentz**, único parámetro del sistema dinámico.

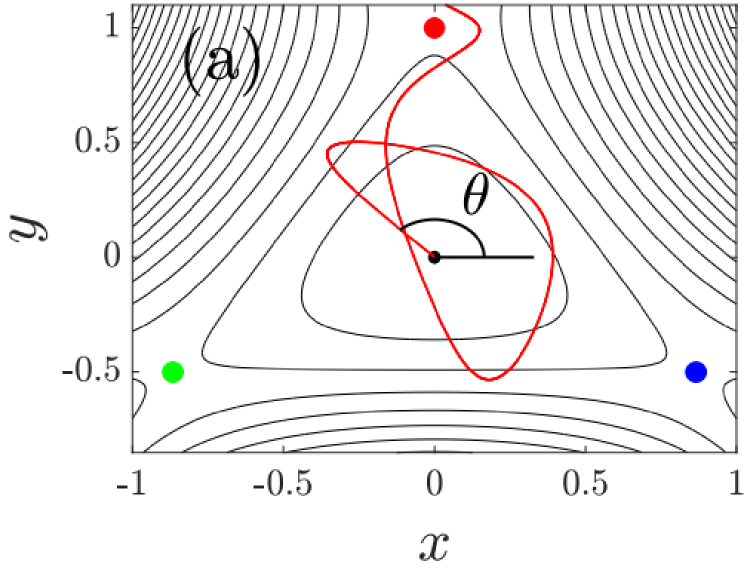
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Dos relojes:

t_e · Reloj fijo (**SRI**): mide el tiempo de escape.

τ_e · Reloj móvil (**SRNI**): mide el tiempo de escape propio.





Fenómeno de dilatación temporal:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)}$$

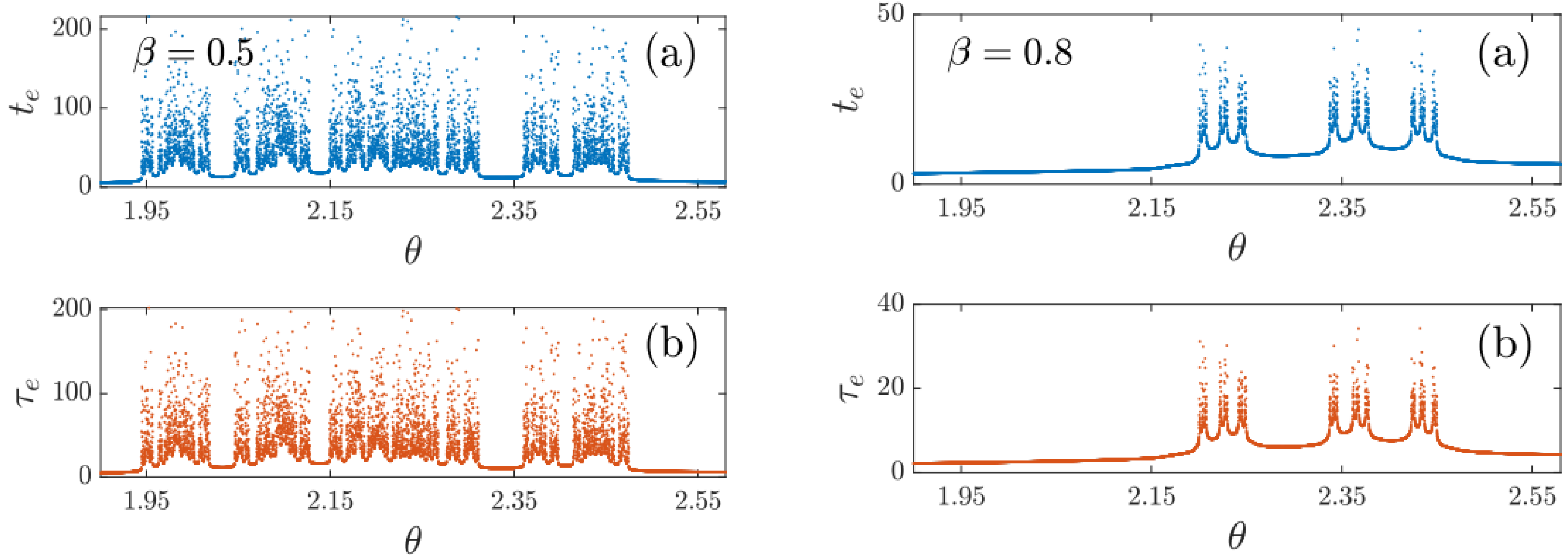
$$\tau_e = \int_0^{t_e} \frac{dt}{\gamma(t)} \xrightarrow[\gamma(t) \in [1, \gamma_c]]{} \boxed{\tau_e \approx \frac{t_e}{\bar{\gamma}}}$$

$\bar{\gamma} > 1$

$\tau_e < t_e$

t_e

τ_e



$$\boxed{\tau_e \approx \frac{t_e}{\bar{\gamma}}}$$

$$\bar{\gamma} > 1$$

$$\tau_e < t_e$$

¿Qué efecto tiene una transformación de coordenadas en la **dimensión de incertidumbre**?

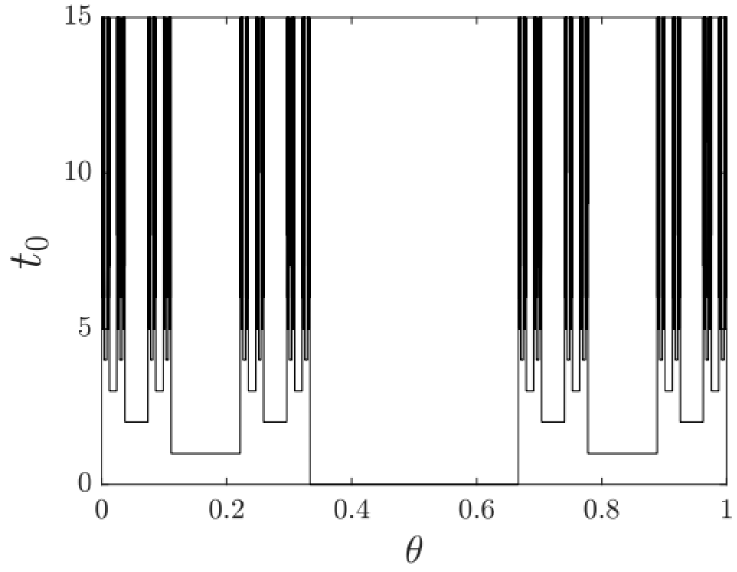
$$\alpha_\tau \approx \alpha_t$$

· Conjunto de Cantor. $\boxed{t_0}$ $\boxed{\tau_0}$

$$\alpha_t = \frac{\ln 2}{\ln 2 + \sigma_t t_0}$$

$$\alpha_\tau = \frac{\ln 2}{\ln 2 + \sigma_\tau \tau_0}$$

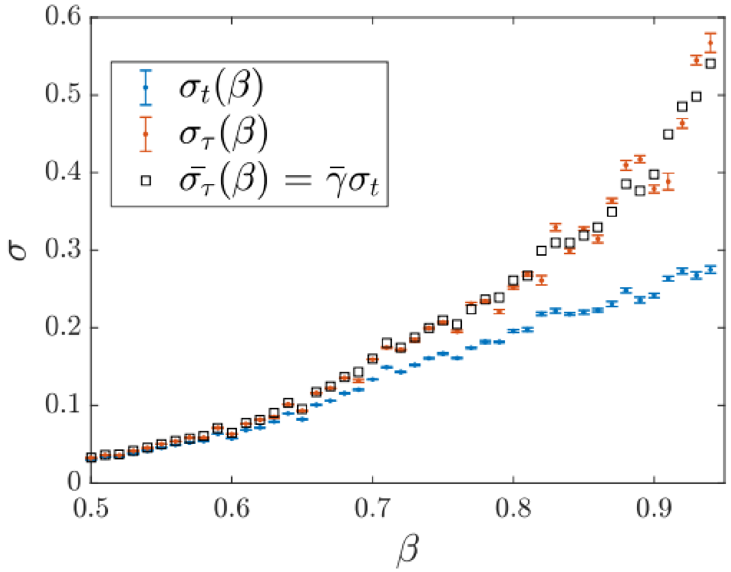
$$\boxed{\tau_0 \approx \frac{t_0}{\bar{\gamma}}}$$



· Exponentes de decaimiento

$$N(t) = N_0 e^{-\sigma_t t}$$
$$N(\tau) = N_0 e^{-\sigma_\tau \tau}$$

$$\boxed{\sigma_\tau \approx \bar{\gamma}\sigma_t}$$

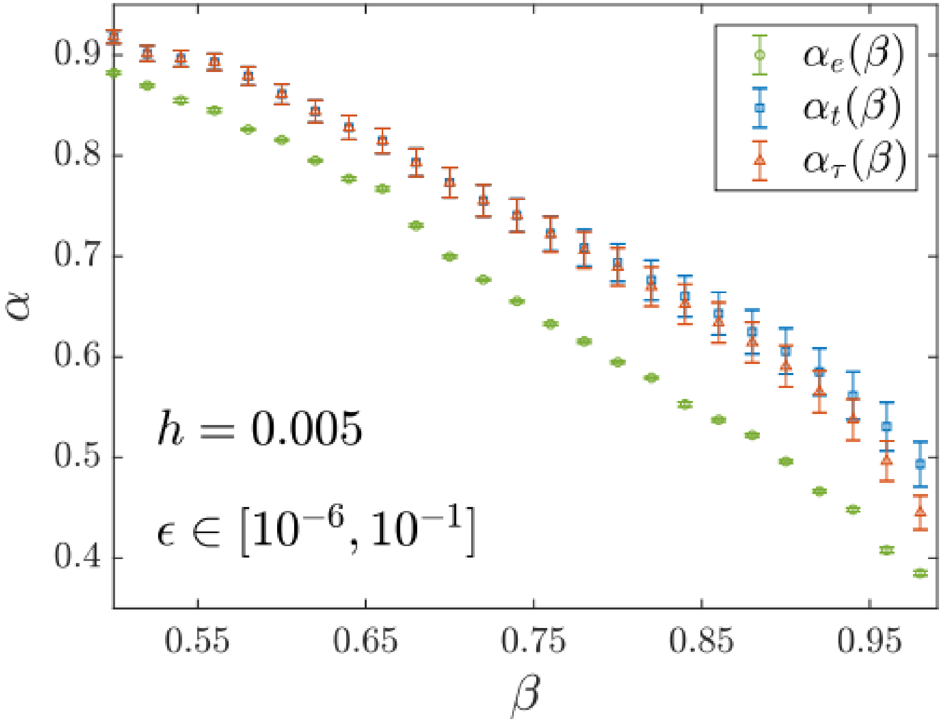


$$\boxed{\alpha_\tau} \approx \frac{\ln 2}{\ln 2 + (\sigma_t \bar{\gamma})\left(\frac{t_0}{\bar{\gamma}}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 2 + \sigma_t t_0} = \boxed{\alpha_t}$$

Dimensión invariante bajo transformación de Lorentz.

Dimensión de incertidumbre computacional de las funciones de los tiempos de escape (I).

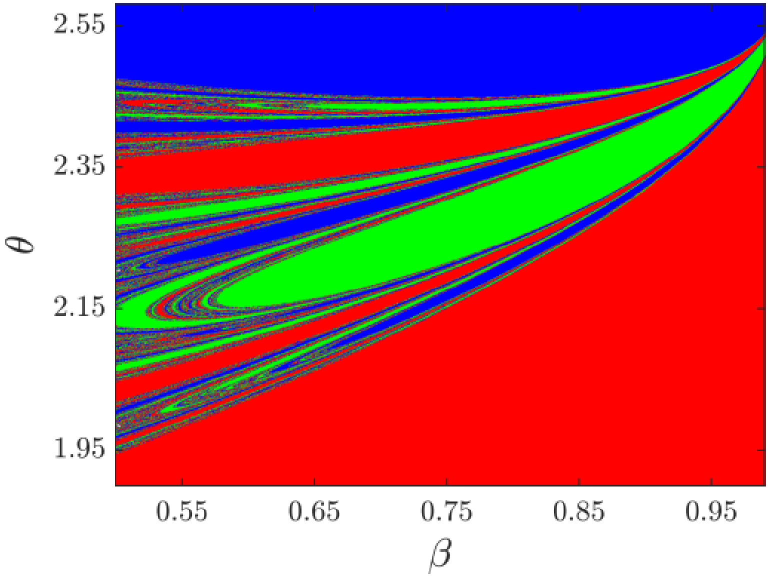
- Dimensiones computacionales frente al factor de Lorentz

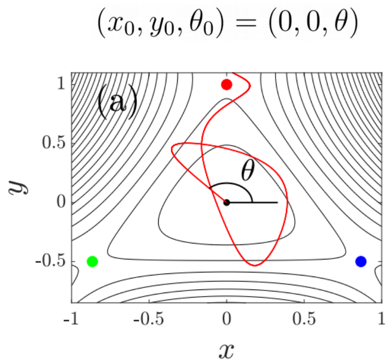


$$\boxed{\alpha_\tau \approx \alpha_t}$$

$\alpha \in [0, 1] \longrightarrow$ Si $\alpha = 1$, el sistema es totalmente caótico.

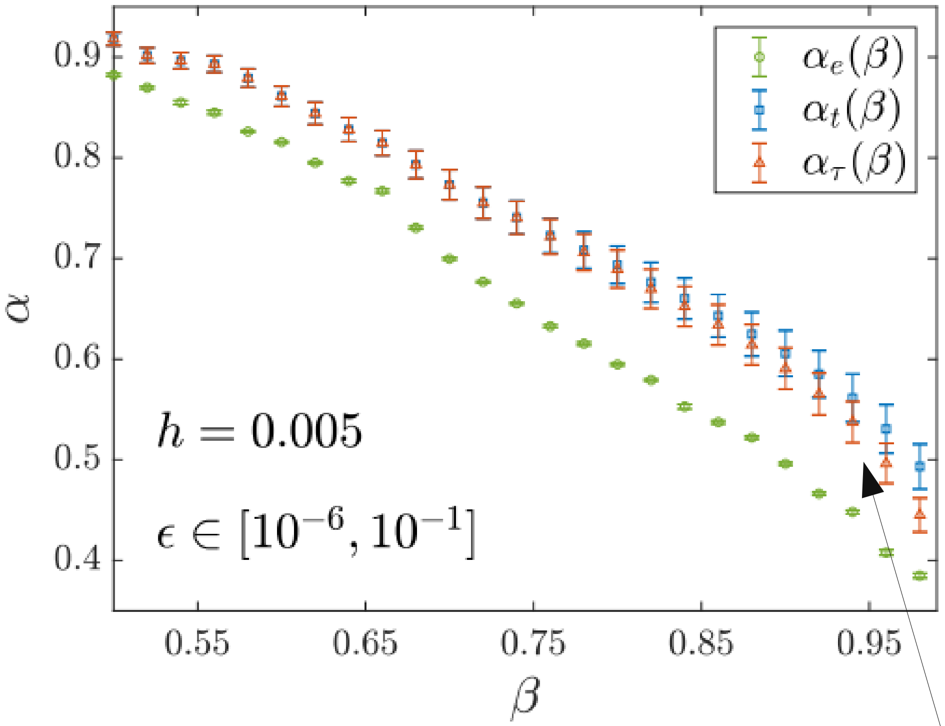
- Salidas.





Dimensión de incertidumbre computacional de las funciones de los tiempos de escape (I).

- Dimensiones computacionales frente al factor de Lorentz



$\alpha_t \neq \alpha_\tau$

$$\boxed{\alpha_\tau \approx \alpha_t}$$

Físicamente, ambos relojes tienen una precisión finita h:

Trayectorias cercanas: $\theta_0,\ \theta_0 + \epsilon$

$$|t_e(\theta_0) - t_e(\theta_0 + \epsilon)| > h$$

$$|\tau_e(\theta_0) - \tau_e(\theta_0 + \epsilon)| > h$$

$$\boxed{\tau_e \approx \frac{t_e}{\bar{\gamma}}}$$

$$\boxed{\bar{\gamma} > 1}$$

$$\boxed{\tau_e < t_e}$$

- El **caos** es una propiedad intrínseca del sistema, por tanto, invariante Lorentz:

$\boxed{t_e}$ $\boxed{\tau_e}$ comportamientos caóticos.

- La **dimensión de incertidumbre** de la función de los tiempos de escape es un indicador de caos:
  - Teóricamente, invariante Lorentz.
  - Computacionalmente, invariante Lorentz, aunque depende de la precisión finita de los relojes.

$$\boxed{\alpha_\tau \approx \alpha_t}$$