Le jeu de la survie en dynamique non linéaire

Miguel A. F. Sanjuán(1), Jacobo Aguirre (1) et Francesco d'Ovidio (2)
(1) Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos, Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza, Universidad Rey Juan Carlos, 28933 Móstoles, Madrid, Espagne
(2) Instituto Mediterráneo de Estudios Avanzados, 07071 Palma de Mallorca, Espagne
msanjuan@escet.urjc.es

Résumé

Nous considérons l'application "tente" comme un prototype d'un système chaotique avec échappements. Nous montrons de façon analytique qu'il est possible de choisir une perturbation même petite, telle que le système reste toujours près d'une selle chaotique, même en présence d'un bruit d'amplitude plus grande. Il s'agit d'un jeu mathématique entre deux joueurs "le protagoniste" et "l'adversaire", et l'objectif du protagoniste est de survivre dans une région bornée, c'est à dire le voisinage d'une selle chaotique. Il peut perdre mais il ne peut pas gagner; le mieux qu'il puisse faire est de survivre et jouer à nouveau, se battre à l'infini. En l'absence d'actions pour n'importe quel joueur, la dynamique diverge, en laissant une région relativemente sûre, et alors nous disons que le protagoniste perd. La survie est difficile parce que des actions plus fortes que le protagoniste sont permises. En revanche, la survie est possible parce que la dynamique, (ici modelée par l'application "tente"), est chaotique; et parce que le protagoniste connaît l'action de l'adversaire en choisissant sa réponse et il lui est permis de choisir le point initial x_0 du jeu. Finalement nous montrons que le protagoniste peut survivre.

1 Introduction

Le phénomène du chaos transitoire [1] est un fait physique intéressant qui arrive dans des systèmes où une trajectoire se meut d'une façon chaotique pour une période de temps dans une région bornée et finalement arrive à un état final, qui n'est habituellement pas chaotique. Plusieurs manifestations du chaos transitoire apparaissent dans la diffusion chaotique [2], l'advection chaotique en dynamique des fluides [3] où la compétition des espèces en écologie [4], pour n'en citer que quelques-unes. Du point de vue de la dynamique non linéaire, le phénomène du chaos transitoire est associé à l'existence d'un certain type d'ensemble qui s'appelle selle chaotique (chaotic saddle). Il est connu aussi comme ensemble invariant chaotique non attractif, et il est composé d'un ensemble borné d'orbites instables périodiques et apériodiques. Les orbites typiques du système approchent la selle chaotique en suivant la variété stable et après avoir résidé pendant une période dans son voisinage, s'en échappent en suivant la variété instable. Un important défi consisterait à trouver une méthode pour maintenir une orbite dans le voisinage de cet ensemble invariant indéfiniment.

La dépendance extrême aux conditions initiales fait que le contrôle avec des pertubations très petites est possible. Diminuer l'amplitude du contrôle constitue donc un objectif important dans ce domaine de recherche. Quand le système est dans un environnement bruyant, le contrôle d'orbites est même plus difficile, et normalement des amplitudes plus grandes que le cas sans bruit sont nécessaires. Après le travail pionnier de Ott, Grebogi et Yorke [5], sur le contrôle du chaos, la plupart des travaux se sont centrés dans des systèmes avec attracteurs chaotiques, que ce soit avec ou sans bruit [6]. Cependant il y a eu très peu d'attention pour le cas du contrôle de selle chaotiques. L'objectif est de trouver une stratégie capable de ramener l'orbite près de la selle chaotique indéfiniment même en présence d'un bruit d'une amplitude plus forte que le contrôle.

Récemment des idées prises de la dynamique non linéaire [7, 8] ont été appliquées pour la modélisation des stratégies des jeux, où le jeu peut être décrit comme un système dynamique et notre travail s'inscrit dans ce contexte. Il s'agit d'un jeu mathématique entre deux joueurs "le protagoniste" et "l'adversaire", et l'objectif du protagoniste est de survivre dans une région bornée, c'est à dire le voisinage d'une selle chaotique. Nous décrivons ici une idée appliquée à un système dynamique non linéaire simple, mais la même idée peut être adaptée à une large varieté de systèmes dynamiques avec une selle chaotique en présence de bruit et contrôle. Dans un système avec attracteurs, la tendance naturelle d'une particule est d'atteindre un des ces attracteurs, et pourtant il est possible que le protagoniste puisse se maintenir dans une région très proche d'un attracteur même quand on permet à l'adversaire des actions plus fortes. Il est important de remarquer qu'en l'absence de contrôle externe, la probabilité de survivre du protagoniste dans le voisinage de la selle chaotique est zéro, même en l'absence de bruit et cela fait que la survie du protagoniste soit une remarquable réussite [9].

La forme la plus simple de ce jeu peut être décrite par une application discrète unidimensionelle, l'application "tente", définie comme: $T(x) = m(1 - |x|) - 1$. Pour les cas d'intérêt comme $m = 3$, presque tous les points initiaux x_0 conduisent à des trajectoires qui vont à $-\infty$ pour $n \to \infty$. Dans ce cas, nous affirmons que le protagoniste ne survit pas. Pour survivre il doit agir. L'équation du jeu est:

$$x_{n+1} = T(x_n) + u_{n+1} + r_{n+1} \tag{1}$$

où l'adversaire choisit la perturbation u_{n+1} (en connaissant x_n et T) et le protagoniste choisit la "réponse" r_{n+1} (en connaissant u_{n+1} et x_n et T). La perturbation u_{n+1} peut être choisie au hasard ou avec une stratégie efficace. Il n'y a pas de différence à long terme dans le cas où le protagoniste peut survivre pour toujours.

Le protagoniste affronte ce qui apparaît comme une tâche impossible parce qu'uniquement est permis $|u_n| \leq u_0$ et $|r_n| \leq r_0$ où r_0 et u_0 sont tels que $r_0 < u_0$. Si on considère r_n étant comme un contrôle et u_n comme un bruit, la condition requise est que le contrôle est plus fort que le bruit. Cependant, le principal objectif de ce travail est de montrer que dans le contexte du chaos transitoire il est possible de contrôler une orbite en présence de bruit, même dans le cas où le bruit est plus fort que le contrôle. L'amplitude de r_n est plus petite que l'amplitude de u_n, de telle sorte qu'on peut qualifier r_n d' "influence" plutôt que de "contrôle" parce que le protagoniste ne peut pas contrôler les détails de la trajectoire. Pour cela, nous faisons que la région relativement sûre soit l'intervalle $S = [-1, +1]$ et finir le jeux si quelque x_n est situé en dehors de S. Si x_n est en dehors de S, l'adversaire peut choisir la suite u_n qui cause que la suite x_n diverge, et il y a un intervalle un peu plus grand qui dépend de u_0 et r_0 de telle façon que si x_n est en dehors, la trajectoire doit diverger même dans le cas où l'adversaire essaye d'aider. Pour garder les formules simples, nous écrivons les résultats pour $m = 3$, bien que des résultats similaires on peut obtenir n'importe quelle valeur de $m > 2$. (Si $m \leq 2$, il y a un attracteur chaotique et si u_0 est suffisament petit, la survie est garantie même si la taille de réponse est 0.). Nous commençons par un exemple.

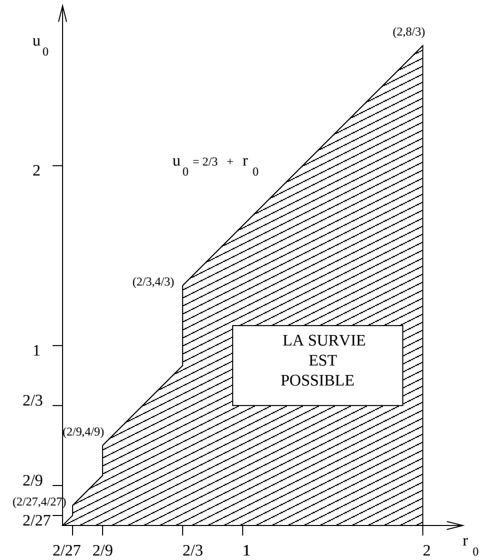

FIG. 1 – *Région de paramètres de survie. La survie est possible dans la région en hachurée si le protagoniste choisi d'une façon optimale. Au delà de la région hachurée, l'adversaire peut toujours gagner.*

Pour $u_0 = 4/9$ et $r_0 = 2/9$, il existe une stratégie qui garantie la survie.

Si $u_0 > 2r_0$ alors il n'y a pas une stratégie qui garantie la survie.

La meilleure stratégie pour la survie dépend de r_0 comme le démontre le théorème suivant. Il existent des stratégies différentes pour $r_0 \geq 2/3$, et chaque k où r_0 est dans $[2/3^k, 2/3^{k-1})$.

Théorème. Il y a une stratégie qui garantie la survie pour une valeur r_0 donnée et u_0 si et seulement s'il y a un intérêt $k \geq 1$ pour qui $2/3^k \leq r_0$ et $u_0 \leq r_0 + 2/3^k$.

Ce type de problème est très différent de la notion de contrôle standard où l'objectif est d'amener une trajectoire à un point fixe. Dans la théorie de contrôle du chaos [5] par exemple, si le bruit est présent (i.e., u_n choisi au hasard), le contrôle r_n doit dominer u_n de telle façon qu'il soit capable d'amener la trajectoire à un point fixe spécifique et le garder proche de ce point fixe. Dans le jeu de la survie, que nous décrivons ici pour l'application "tente", il y a plusieurs "points sûrs" et r_0 doit être suffisamment grand pour le protagoniste peut arriver à un d'eux, mais ce choix est déterminé pour la valeur de u_n. Le protagoniste doit se déplacer entre ces points sûrs dans un ordre déterminé par la suite u_n.

Exemple. Avant d'analyser le théorème en détail, nous examinons le cas mentionné au-dessus, $u_0 = 4/9$ et $r_0 = 2/9$ et nous montrons que le protagoniste peut survivre. Nous désignons quatre points comme "points sûrs", $z_1 = -2/3 - 2/9$, $z_2 = -2/3 + 2/9$, $z_3 = +2/3 - 2/9$ et $z_4 = +2/3 + 2/9$. Il est facile de vérifier que $T(z_i) = \pm 2/3$, et $T(\pm 2/3) = 0$. L'application "tente" est montrée dans la Fig. 2 où tous les points sont représentés, et la Fig. 3 représente l'évolution d'une orbite dans cette situation. La stratégie du protagoniste doit être de telle sorte que tous les x_n dans l'équation (1) soient des points sûrs pour garantir sa survie. En particulier, le protagoniste doit choisir que x_0 soit un des points sûrs pour garantir qu'il va réussir (quoiqu'en fait la plupart des points en $S = [-1,1]$

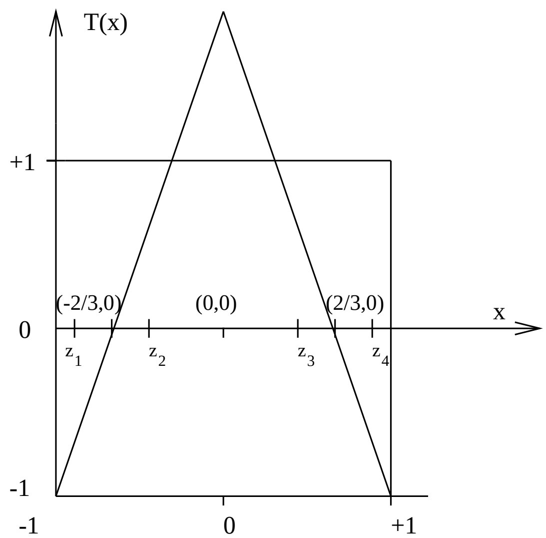

FIG. 2 – *L'application "tente" $T(x) = m(1-|x|)-1$ défini dans l'intervalle $[-1,+1]$ pour $m = 3$. Les quatre points z_i désignent "points sûrs" et aussi $T(z_i) = \pm\ 2/3$.*

pourraient être valables comme x_0.) Si x_n est un point sûr pour n'importe quel entier $n \geq 0$, alors nous montrons qu'il peut choisir r_{n+1} de telle sorte que x_{n+1} est un point sûr, et alors il survit un autre jour. Étant donne que x_n est un point sûr, nous pouvons supposer par exemple que $T(x_n)$ est $+2/3$. (Le cas $-2/3$ est identique.) Dès lors, une fois choisi u_{n+1}, le point $T(x_n) + u_{n+1}$ doit être dans l'intervalle $[2/3 - 4/9{,}2/3 + 4/9]$ et ainsi est au plus à une distance de $2/9$ des points z_3 où z_4. De là r_{n+1} peut être choisi avec $|r_{n+1}| \leq r_0$ de telle sorte que x_{n+1} est un point sûr. Ce cas peut être généralisé en constatant que cette stratégie fonctionne si $u_0 - r_0 \leq 2/9$.

Cet exemple illustre la raison pour laquelle nous appellons ce problème le jeu de la "survie" plutôt que le "contrôle", puisque le protagoniste est "ballotté" d'un point sûr à un autre sans être capable de choisir entre ces points (comme décrit la Fig. 3). Il y a typiquement un seul point qui puisse être atteint avec $|r_{n+1}| \leq r_0$ pour chaque n. Dans l'exemple ci-dessus, il faut remarquer que $T(x_{n+1})$ est $-2/3$ si x_{n+1} est z_4 ou $+2/3$ si x_{n+1} est z_3. Le protagoniste ne peut pas choisir si $T(x_{n+1})$ doit être positive ou négative (à moins que u_{n+1} soit 0 de telle sorte que z_3 et z_4 soient également proches).

La stratégie générale (appelée R) pour choisir r_{n+1} consiste à identifier une collection de points sûrs et choisir x_0 pour être l'un d'entre eux et de là choisir r_{n+1} afin que x_{n+1} soit un point sûr. Dans le cas où $2/3 \leq r_0$ et $u_0 \leq r_0 + 2/3$, $(k = 1)$, il y a 2 points sûrs, qui sont $z_1 = -2/3$ et $z_2 = 2/3$. Alors si x_n est un point sûr, $T(x_n) = 0$, et le point $T(x_n) + u_{n+1}$ doit être dans l'intervalle $[-u_0{,}u_0]$. Comme $u_0 \leq r_0 + 2/3$, chaque point de l'intervalle est à une distance r_0 jusqu'à un point sûr. Par conséquent, la stratégie peut être menée à bout.

Dans le cas général où $2/3^k \leq r_0$ et $u_0 \leq r_0 + 2/3^k$, il y a 2^k points sûrs, à savoir $T^{-k}(0) : \pm 2/3^1 \pm 2/3^2 \pm\ ... \pm 2/3^k$ for $k \geq 1$.

Il faut remarquer que $T(\pm 2/3^1 \pm 2/3^2 \pm\ ... \pm 2/3^k)$ est un point de la forme $\pm 2/3^1 \pm 2/3^2 \pm\ ... \pm 2/3^{k-1}$ (qui est simplement 0 si $k = 1$). L'argument montre que la stratégie peut fonctionner.

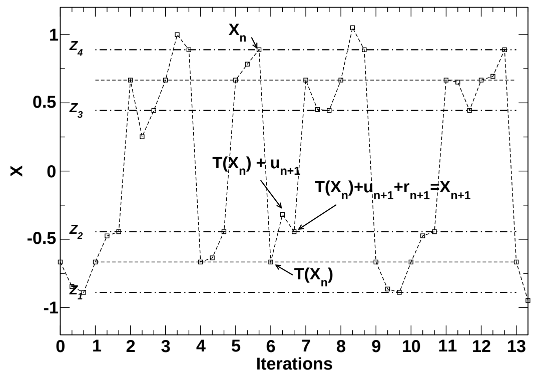

FIG. 3 – *Évolution d'une orbite, pour $k = 2$, $m = 3$, $r_0 = 2/9$ et $u_0 = 4/9$. Les quatre lignes points-tirets représentent les "points sûrs" z_i, et les lignes tirets représentent leurs images $T(z_i) = \pm\ 2/3$. Les points qui ne sont pas au delà d'aucune de ces lignes représentent les pas de l'orbite après l'influence du bruit u_n.*

Nous argumentons maintenant qu'une stratégie est garantie seulement dans les cas ci-dessus mentionnés. Pourtant si k est choisie de telle sorte que $2/3^k \leq r_0 < 2/3^{k-1}$ pour quelque $k \geq 1$, et $u_0 = r_0 + 2/3^k + \delta$ où $\delta > 0$, alors il n'existe pas une stratégie qui puisse être garantie; d'autre part, il existe une stratégie U pour choisir les points u_n de telle façon que le protagoniste perd.

Soit S_k l'ensemble de points sûrs. La stratégie U consiste à choisir u_n de sorte que $T(x_{n-1}) + u_n$ soit aussi lointain que possible. Soit Y_k l'ensemble $\{x : |x - y| \leq r_0$ pour n'importe quel y dans $S_k\}$. Alors Y_k est l'ensemble des points qui ne sont pas plus lointains de r_0 que de quelques points sûrs. Pour tout point x_0, il y a un u_1 avec $|u_1| \leq u_0$ tel que $T(x_0) + u_1$ n'est pas dans Y_k. Pour autant $x_1 = T(x_0) + u_1 + r_1$ (avec $|r_1| \leq r_0$) n'est pas un point sûr. Soit J_k le plus petit intervalle contenant S_k.

Si x_n n'est pas dans J_k, il est facile de vérifier que la stratégie U aboutit à x_{n+1} qui est aussi en dehors J_k, mais plus loin de S_k. Si x_n est dans J_k, et J' représente l'intervalle le plus petit contenant x_n dont les frontières sont de points sûrs. La stratégie U mène dans x_{n+1} laquelle est dans $T(J')$, qui n'a pas de points de S_{k-1} dans son intérieur et x_{n+1} est plus lointain que S_k. De plus, la longueur de $T(J')$ est plus grande que celle de J'. Comme le procesus évolue, la trajectoire est éventuellement à l'extérieur de J_k, un cas qui a été discuté ci-dessus.

Nous avons realisé plusieurs expériences numériques pour clarifier nos résultats. Un bruit distribué uniformément avec une valeur moyenne de zéro a été utilisé comme u_n, puisque l'unique condition requise est d'être bornée. Evidemment les mêmes résultats auraient été obtenus pour tout autre cas de bruit borné. Il faut remarquer que pour cette raison le bruit gaussien ne garantie pas la survie du protagoniste. Pour des valeurs très différentes de k, m, la réponse maximum r_0 et la perturbation maximum u_0, étant $r_0 \leq u_0$, nous avons itéré la dynamique du jeux jusqu'à plusieurs millions de pas. Comme affirme notre théorème, le protagoniste survit à l'intérieur d'une région sûre $[-1,1]$ si et seulement si $u_0 \leq 2r_0$.

Les résultats de ce travail peuvent être généralisés à toute application discrète unidimensionelle et unimodale avec un selle chaotique associé (c'est à dire avec des échappements), montrant qu'il est toujours possible de survivre avec moins de contrôle que de bruit. La relation $\frac{u_0}{r_0}$, aussi bien que la structure des points sûrs dépendra des propriétés de chaque application discrète.

En résumé, nous décrivons dans cet article une idée qui pourrait potentiellement être appliquée à une grande varieté d'applications avec un selle chaotique, en présence d'environnements bruyants, pour un choix de r_0 et u_0 adéquat. Contrairement à l'idée traditionnelle de contrôle, qui tend à mener l'état d'un système à un état précis, il y a des situations où il y a seulement la possibilité d'une influence dans un environnement chaotique. La différence entre *influence* et *contrôle* grossièrement peut être décrite par $r_0 < u_0$ vs. $r_0 > u_0$. Finalement, l'information nécessaire pour appliquer notre méthode est juste de connaître la position approximative des points sûrs. Cette information peut être obtenue par l'analyse de séries de temps, et cela suggére la possible application de cette méthode de contrôle aux systemes physiques.

Remerciements

Nous remercions James A. Yorke pour nous avoir suggéré ce problème qui, nous croyons peut être considéré comme une analogie de la vie quotidienne. J. A. et M. S. remercient le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, projets BFM2000-0967 and BFM2003-03081 et l'Universidad Rey Juan Carlos, projets URJC-PGRAL-2001/02, URJC-PIGE-02-04 et URJC-GCO-2003-16. F. d'O. remercie le soutien financier du Ministère des Sciences et Technologie de l'Espagne, et FEDER, projet REN2001-0802-C02-01/MAR (IMAGEN).

Références

[1] T. Tel, "Transient chaos," in *Directions in Chaos*, Vol. 3, Experimental Study and Characterization of Chaos, edited by Hao Bai-Lin (World Scientific, Singapore, 1990), pp. 149-211.

[2] S. Bleher, C. Grebogi, and E. Ott, *Bifurcation to Chaotic Scattering*, Physica D **46**, 87 (1990).

[3] C. Jung, T. Tel, and E. Zemniak, *Application of scattering chaos to particle transport in a hydrodynamical flow*, Chaos **3**, 555 (1993).

[4] K. McCann and P. Yodzis, *Nonlinear Dynamics and Population Disappearances*, Am. Nat. **144**, 873 (1994).

[5] E. Ott, C. Grebogi, and J.A. Yorke, *Controlling Chaos*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1196 (1990).

[6] L. Poon and C. Grebogi, *Controlling Complexity*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4023 (1995).

[7] E. Akiyama and K. Kaneko, *Dynamical Systems Game Theory and Dynamics of Games*, Physica D **147**, 221 (2000).

[8] E. Akiyama and K. Kaneko, *Dynamical Systems Game Theory II*, Physica D **167**, 36 (2002).

[9] J. Aguirre, F. d'Ovidio, and M.A.F. Sanjuán, *Controlling chaotic transients: Yorke's Game of Survival*, Phys. Rev. E **69**, 016203 (2004). Virtual Journal of Biological Physics Research **7**(3) (2004).