



Departamento de Matemáticas y Física
Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza

**Información, comunicación y no
linealidad: de los elementos
simples a las redes complejas**

Luis López Fernández

Universidad Rey Juan Carlos

Enero 2003

Para María, la muestra de que lo complejo nunca es lo más sencillo pero sí siempre lo más interesante.

Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de varios años de trabajo que no habrían sido posibles sin la ayuda de numerosas personas. En particular, me gustaría expresar mi gratitud a las siguientes.

Mi director, el Prof. Miguel Angel Fernández Sanjuán, aceptó siempre mis ideas y me animó a continuar con este trabajo en todo momento. Con frecuencia, él era el único que realmente confiaba en la viabilidad de algunas de las líneas de investigación que abrimos. Incluso en los peores momentos, siempre encontró el modo de convencerme para no abandonar y continuar trabajando y publicando. El Prof. Sanjuán siempre ha tratado de ayudar y cooperar, siguiendo muy de cerca mis primeros pasos en el mundo científico. Por estas razones, trabajar con él ha sido una experiencia que nunca olvidaré.

El Prof Jürgen Kurths y el Dr. Alexei Zaikin, de la Universidad de Potsdam, me trataron, desde el primer momento, como un miembro más de su equipo, tomando siempre en consideración mis ideas y ayudándome, con paciencia, a introducirme en el mundo de la resonancia estocástica y vibracional. Algunos de los trabajos más interesantes de esta tesis han sido posibles gracias a su generosidad.

Gracias también al Prof. Murilo Baptista, de la Universidad de Sao Paulo, un gran científico y un gran amigo. Murilo generosamente me permitió colaborar en su trabajo relativo a codificación de información en mapas discretos, lo que, a día de hoy, constituye uno de los temas más interesantes de esta tesis.

Mis colegas y amigos del Grupo de Dinámica no Lineal y Teoría del Caos de la Universidad Rey Juan Carlos han sido una constante fuente de inspiración y ánimo durante los años en los que se ha desarrollado esta tesis. En este tiempo, hemos compartido multitud de buenos momentos pero también no pocas preocupaciones y dificultades. En cualquier caso, siempre han hecho posible que se dé el ambiente apropiado para trabajar y disfrutar haciéndolo. En especial, me gustaría agradecer la colaboración de la Dr. Inés Pérez Mariño, quien me introdujo en el campo de la codificación de canal utilizando señales caóticas. Su ayuda ha sido imprescindible para que las investigaciones llevadas a cabo en este ámbito hayan llegado a buen puerto. También me gustaría expresar mi gratitud hacia el Dr. José Pablo Baltanás, nuestro experto en dinámica neuronal, quien ha sufrido en multitud de ocasiones mis ideas, a veces disparatadas, sobre comunicaciones basadas en receptores neuronales.

También me gustaría reconocer la paciencia silenciosa de María, quien ha soportado conmigo las incontables horas que han sido necesarias para realizar este trabajo, incluyendo fines de semana y vacaciones.

Mi familia ha estado siempre ahí en los mejores y en los peores momentos y por ello me gustaría agradecerles todo lo que han hecho por mí. A mi madre, que nunca ha leído un libro científico, pero que parece saber más sobre este mundo complejo que la mayoría de la gente que he conocido. A mi padre, que no ha escatimado esfuerzos para hacerme encontrar el camino de la felicidad. Finalmente, a mi hermano, que me ha ayudado en el desarrollo de la tesis, a veces con su esfuerzo y a veces también con su dinero, del mismo modo que me ha apoyado en todos los proyectos en los que me he embarcado a lo largo de mi vida.

Prefacio

Este trabajo es el resultado del esfuerzo realizado durante cuatro años de investigación en los que hemos tratado múltiples temas que abarcan campos tan dispares como la dinámica no lineal, la teoría de la información, la ingeniería de telecomunicación y las redes complejas. En todos los casos, nuestro objetivo ha sido desarrollar modelos matemáticos y computacionales de la realidad que tratamos de analizar. Dependiendo la naturaleza de los modelos, hemos clasificado estos estudios en tres partes diferentes: *Modelos en lo simple*, donde desarrollamos modelos de componentes aislados; *Modelos en la frontera*, donde se describen sistemas compuestos de múltiples constituyentes que interactúan siguiendo topologías regulares; y *Modelos en lo complejo*, donde tratamos con realidades compuestas de múltiples elementos relacionados de un modo complejo. Cada parte incluye varios capítulos que presentan temas de investigación particulares. Considerando la naturaleza interdisciplinar de este trabajo, hemos tratado de escribir la tesis de modo que cualquiera de sus capítulos pueda ser leído de manera independiente. Por esta razón, el lector interesado puede establecer su propio orden de preferencias a la hora de leer la tesis. A modo de guía, presentamos ahora un breve resumen de los diferentes capítulos.

Modelos en lo simple. Esta primera parte de la tesis está dedicada al estudio y modelización de fenómenos simples no lineales. Está organizada en dos capítulos en los que proponemos tres modelos de comunicación, basados en principios diferentes.

Capítulo 1. El potencial de doble pozo. En este capítulo, nuestro objetivo es analizar las propiedades de uno de los sistemas más simples capaces de contener información: el potencial de doble pozo. Mostramos que hay una relación muy estrecha entre la dinámica de esta clase de sistemas y el concepto de información. Acto seguido, proponemos un modelo de receptor digital de comunicación basado en el doble pozo y mostramos que la capacidad de información de un canal que use tal receptor presenta un fenómeno de resonancia estocástica. Finalmente, comparamos el funcionamiento de esta clase de sistemas con los mejores receptores usados en nuestros días y extraemos las conclusiones apropiadas.

Capítulo 2. Comunicaciones usando caos. Este capítulo ha sido concebido con el objetivo de demostrar que existe una profunda relación entre la dinámica caótica de algunos sistemas no lineales y la teoría de la información de Shannon. Algunos conceptos, como los de incertidumbre, entropía de una fuente de información, redundancia, etc; emergen de forma natural en esta clase de sistemas deterministas. Basándonos en estas ideas, proponemos dos esquemas de codificación - decodificación. Uno que utiliza un mapa discreto unidimensional y otro basado en el atractor

de Lorenz: el sistema caótico continuo más popular. Analizamos por separado el funcionamiento de los dos modelos de comunicación y proponemos diferentes modos de llevarlos a la práctica.

Modelos en la frontera. En esta parte, nuestro objetivo es analizar algunos modelos concretos de sistemas compuestos por varios constituyentes en los que las interacciones pueden ser descritas a través de topologías regulares. Finalmente, mostramos que esta clase de sistemas permite un procesamiento complejo de la información. Esta parte está organizada en tres capítulos.

Capítulo 3. Conjuntos neuronales para comunicaciones inalámbricas. En este capítulo, proponemos un modelo de comunicación basado en un conjunto neuronal. Suponiendo que el ruido recibido por las diferentes neuronas es independiente, mostramos que este tipo de sistemas podría ser usado para desarrollar una nueva clase de receptor de radio digital susceptible de mejorar la tecnología comúnmente usada en nuestros días.

Capítulo 4. Efectos no lineales en estructuras inducidas por ruido. Este capítulo está dedicado al estudio de algunos fenómenos interesantes que aparecen en las estructuras inducidas por ruido. Demostramos que esta clase de sistema puede presentar un efecto de resonancia vibrational, donde el tratamiento de una señal de baja frecuencia es mejorado por la adición de una fuerza de alta frecuencia. Finalmente, basándonos en un modelo efectivo, confirmamos experimentalmente la presencia de este fenómeno en sistemas biestables.

Capítulo 5. Retículas celulares y sus aplicaciones. En este capítulo, el objetivo es ilustrar como un conjunto de elementos simples conectados a través de una topología regular puede presentar un procesamiento complejo de información. Mostramos que esta propiedad puede ser usada en el contexto del procesamiento de imágenes.

Modelos en lo complejo. Esta última parte de la tesis contiene modelos de sistemas complejos, en los que las interacciones entre los componentes son complicadas y sólo pueden ser descritas en el contexto de la teoría de grafos y redes. Considerando la naturaleza de los fenómenos que tratamos de describir, los modelos desarrollados asumen un elevado nivel de abstracción. El objetivo es el de capturar las reglas esenciales que gobiernan estos sistemas y no el de crear una descripción completa de los mismos. Esta parte está organizada en dos capítulos.

Capítulo 6. Flujos de Información en redes sociales. En este capítulo, proponemos un modelo de propagación de información en redes sociales. Usando este modelo, demostramos que hay una relación muy estrecha entre la estructura de comunidades sociales y organizaciones y su eficiencia. Finalmente, aplicamos estos conceptos al análisis de redes jerárquicas, que están presentes en muchas empresas y organizaciones. Mostramos que las estructuras jerárquicas no son óptimas en términos de eficiencia de información y ponemos en evidencia que son la consecuencia del afán de maximizar la influencia que cada individuo tiene en una red.

Capítulo 7. Redes complejas en los mercados de Internet. Este capítulo está dedicado al estudio de la dinámica competitiva en los mercados del WWW en Internet. Mostramos que esta clase de problemas puede ser vista dentro del contexto de las redes complejas. Usando algunas restricciones, analizamos la estabilidad del

modelo y mostramos que los sitios web pueden encontrar una estrategia óptima en cualquier clase de mercado. Finalmente, ponemos en evidencia que, debido a la no linealidad del modelo, algunos fenómenos interesantes aparecen cuando se tiene en cuenta la colaboración entre sitios.

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Una visión pléctica	1
1.2	Lo simple, la frontera y lo complejo	2
1.3	La nueva ciencia de las redes	4
1.4	Información, comunicación y no linealidad	5
I	Modelos en lo simple	7
2	El potencial de doble pozo	9
2.1	Introducción	9
2.2	Un modelo de comunicación	10
2.2.1	Modulación por impulsos de código	11
2.2.2	El receptor de doble pozo	12
2.3	Resonancia estocástica y capacidad de información	15
2.4	Aplicaciones a las comunicaciones digitales	17
2.5	Conclusiones	21
3	Comunicaciones usando caos	25
3.1	Introducción	25
3.2	Codificación caótica discreta	27
3.2.1	Codificando con el mapa de Baker	28
3.2.2	Un modelo de comunicación caótica	32
3.2.3	Método de decodificación simple	34
3.2.4	Método de decodificación caótico de paso atrás	37
3.2.5	Método caótico predictivo	39
3.3	Codificación caótica continua	43
3.3.1	Controlando el oscilador de Lorenz	46
3.3.2	Un código de canal con corrección de errores	52
3.3.3	Protección frente a errores	54
3.3.4	Puesta en práctica	55
3.4	Conclusiones	55

II	Modelos en la frontera	59
4	Conjuntos neuronales y comunicaciones inalámbricas	61
4.1	Introducción	61
4.2	El modelo	62
4.3	Un modelo de comunicación	63
4.4	Puesta en práctica	66
4.5	Conclusión	69
5	Efectos no lineales en estructuras inducidas por ruido	71
5.1	Introducción	71
5.2	Resonancia vibracional	74
5.3	Confirmación experimental	77
5.4	Conclusión	80
6	Retículas celulares y sus aplicaciones	83
6.1	Introducción	83
6.2	Retículas de autómatas celulares	83
6.3	Detección de bordes	85
6.4	Retículas de neuronas acopladas mediante pulsos	88
6.5	Sincronización y detección de regiones	89
6.6	Conclusión	92
III	Modelos en lo complejo	93
7	Flujo de información en redes sociales	95
7.1	Introducción	95
7.2	Un modelo de flujo de información en la sociedad	97
7.3	Estructura y eficiencia en organizaciones	99
7.3.1	Coordinación en diferentes estructuras de grafo	100
7.3.2	El límite 150	105
7.4	Flujos de información en organizaciones	106
7.4.1	Redes jerárquicas	106
7.4.2	Distribución de información y crecimiento jerárquico	109
7.4.3	Centralidad y dominación en organizaciones	113
7.5	Conclusiones	115
8	Redes complejas en los mercados de Internet	117
8.1	Introducción	117
8.2	Descripción del modelo	118
8.3	Clasificación de los mercados	121
8.4	Análisis matemático del modelo	123
8.5	Análisis de los Mercados de Internet	126
8.5.1	Mercados completamente colaborativos	126

8.5.2	Mercados completamente competitivos	127
8.5.3	Mercados Mixtos	128
8.6	Definición de estrategias para vencer en los mercados de Internet	129
8.7	Estrategias para el sitio más poderoso	131
8.7.1	Mercados completamente colaborativos	131
8.7.2	Mercados mixtos	131
8.7.3	Mercados completamente competitivos	132
8.8	Estrategias para pequeños sitios web	132
8.8.1	Mercados completamente colaborativos	132
8.8.2	Mercados completamente competitivos	132
8.9	Haciendo alianzas	133
8.9.1	La unión de 1 y 2 es más poderosa que 3	133
8.9.2	La unión de 1 y 2 es menos poderosa que 3	133
8.10	Estrategias avanzadas	135
8.11	Conclusiones	138
9	Conclusiones	143
9.1	Conclusiones en lo simple	143
9.2	Conclusiones en la frontera	144
9.3	Conclusiones en lo complejo	145
9.4	Publicaciones	146
A	Teoría matemática de la comunicación	151
A.1	Introducción	151
A.2	Entropía e incertidumbre	151
A.3	Entropía de una fuente de información	153
A.4	Modelo general de sistemas de comunicación	153
A.4.1	El canal discreto sin ruido	154
A.4.2	El canal discreto con ruido	154
A.5	Equivocación y capacidad del canal	155
A.6	Entropía de una distribución continua	157
A.7	Capacidad de un canal continuo	158
B	Conceptos básicos sobre sistemas de comunicación.	163
B.1	Relación Señal a Ruido	163
B.2	El canal discreto binario simétrico	163
B.3	El filtro adaptado	164
B.3.1	Realización del filtro adaptado como un correlador	167
B.3.2	Comparación entre convolución y correlación	167
	Bibliografía	169

Capítulo 1

Introducción

Todo es más simple que piensas y al mismo tiempo más complejo de lo que imaginas.

—Johann Wolfgang von Goethe

1.1 Una visión pléctica

Tradicionalmente, los científicos, y principalmente los físicos, han concentrado sus esfuerzos en el estudio y la descripción de los componentes constituyentes del universo. La estrategia más frecuentemente usada es la de dividir un problema particular hasta que una parte concreta de la realidad haya sido aislada. Entonces, es analizada separadamente, buscando las leyes que describen su comportamiento individual, asumiendo que, una vez que entendamos las partes, será fácil comprender el todo. Sin embargo, en los últimos años, una nueva rama de la ciencia, con principios diferentes, ha salido a luz. Esta nueva disciplina propone que la interacción entre las partes es, al menos tan importante, como el comportamiento individual de las partes en sí mismo. Esta nueva ciencia no tiene un tema particular de investigación. Es un sujeto interdisciplinar que cubre aspectos sobre lo simple y sobre lo complejo. El premio Nobel de Física, Murray Gell-Mann, que tiene un don para los nombres (fue el primero en introducir el término *quark*, y posteriormente definió una propiedad llamada *extrañeza*) llama esta nueva disciplina *pléctica* [1], sin embargo, otros autores no están de acuerdo con este término y prefieren usar el neologismo *complexología* o simplemente denominarlo ciencias de la complejidad. Esta controversia refleja que hay múltiples cuestiones por resolver en este campo que no tienen una respuesta clara todavía. De hecho, demasiadas, porque ni siquiera hay un acuerdo sobre el significado de los conceptos de simplicidad y complejidad en sí mismos.

En las últimas décadas, ha habido un esfuerzo intensivo para el desarrollo de una definición exacta de la noción de complejidad. Algunas tentativas interesantes están relacionadas con los conceptos de complejidad computacional y con el contenido algorítmico de información. La complejidad computacional mide cuanto tiempo

se tardaría (o cuanta capacidad sería necesaria), como mínimo, en un ordenador universal estándar, para realizar una tarea particular. Por ello, la complejidad computacional se relaciona con el menor tiempo (o número de pasos) necesario para realizar un cierto cómputo. Por otra parte, con el contenido algorítmico de información se trata de desarrollar una cierta noción de información. Considerando una cadena de bits, se define como la longitud del programa más corto que hará que un ordenador universal estándar imprima esa cadena y luego se detenga. Aunque estas y otras definiciones hayan dado resultados importantes en diferentes disciplinas científicas, ninguna de ellas ha sido capaz de capturar la noción intuitiva que cualquier ser humano tiene sobre lo que es simple y lo que es complejo. En este sentido, es notable el trabajo de Gell-Mann, quien, en su libro *El quark y el jaguar: aventuras en lo simple y en lo complejo* [1], afirma que la noción de complejidad es necesariamente dependiente del contexto y del observador. Por tanto, debe considerarse una noción subjetiva. Esta es probablemente la razón por la que el término complejidad es tan polémico. De hecho, este término es usado con frecuencia por autores diferentes con significados distintos. A veces, se usa como sinónimo de complicado o elaborado, a veces se refiere a cualquiera de sus múltiples definiciones matemáticas y a veces hasta es usado simplemente para describir algo que no conocemos muy bien.

La descripción del quark, como la esencia última de materia, debería ser simple, pero la realidad es que, después de gastar miles de millones de dólares y euros, y después de innumerables esfuerzos de los científicos más brillantes de las últimas décadas, sabemos muy poco sobre sus propiedades. Por otra parte, la capacidad de adaptación a un ecosistema, en principio un ambiente muy complejo, que demuestra un jaguar parece ser eminentemente simple. Gell-Mann ofrece una clave para solucionar este problema: el modelo; o, como él lo llama, el *schemata*. Todos los sistemas adaptativos (o agentes adaptativos) incluyendo los jaguares, las bacterias y hasta las personas tienen la capacidad de generar modelos que les permiten la predicción y la interacción en un ambiente complejo. Quizás, simplemente decimos que algo es complejo mientras no tenemos un modelo apropiado que lo describa.

Uno de nuestros objetivos es el de usar las ideas precedentes para definir lo que entendemos por simple y por complejo. Nuestro objetivo no es crear una definición formal y rigurosa de estos términos, sino especificar una noción de complejidad conveniente para clasificar los diferentes modelos que han sido desarrollados en el marco de esta tesis. La sección siguiente está dedicada a esta tarea.

1.2 Lo simple, la frontera y lo complejo

Como puede ser deducido en la sección precedente, el trabajo presentado en esta tesis trata sobre modelos. Hemos desarrollado un conjunto de diferentes modelos asociados a los problemas que hemos afrontado durante nuestra investigación. Estos problemas van desde el estudio de las capacidades de comunicación de un potencial de doble pozo al flujo de información en redes sociales, pasando por la dinámica competitiva en Internet, las propiedades no lineales de estructuras inducidas por

ruido, etc. En principio, uno podría pensar que todos estos temas no tienen nada en común. Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que esta afirmación está lejos de ser cierta.

Los científicos hacen modelos con el objetivo de conocer mejor el universo. En la medida en que hemos tratado de describir diferentes aspectos del mundo, los modelos que hemos desarrollado han sido también esencialmente diferentes. Sin embargo, podemos establecer una relación entre ellos que puede ser entendida en el marco de la *pléctica*. En esta dirección, vamos a clasificar nuestros modelos dependiendo de la complejidad de la realidad que tratan de caracterizar. Así, un modelo en lo simple es un modelo que describe una realidad simple mientras que un modelo en lo complejo es un modelo que describe una realidad compleja. Esta clasificación es, en cierto modo subjetiva, porque las nociones de simplicidad y complejidad que usamos no están basadas en ningún criterio riguroso. De todos modos, vamos a tratar de proporcionar alguna precisión a estos términos.

Consideramos que un fenómeno es simple cuando un modelo simple puede describirlo con un nivel suficiente de detalle. Cuando tratamos de modelar un sistema físico o un fenómeno, un factor muy importante, que determina la conveniencia de un modelo para predecir futuros comportamientos, es el nivel de detalle o, como por lo general se denomina en física, el *graining*. Un modelo con suficiente *graining* es el que suministra toda la información relevante sobre el fenómeno deseado. Por ejemplo, si tratamos de describir la dinámica de un péndulo, un nivel de detalle que ilustre las interacciones atómicas entre las moléculas que forman el péndulo no es práctico. En este caso, probablemente, una ecuación que proporcione la posición y la velocidad del péndulo en cada momento es suficiente. Más aun, sabemos que esta ecuación puede ser escrita en una forma muy compacta usando las leyes de Newton, de modo que es posible afirmar que el contenido algorítmico de información de esta descripción es bajo. En estas circunstancias, podemos decir que este es un modelo simple (tiene un bajo contenido algorítmico de la información) de un fenómeno simple (puede ser descrito por un modelo simple con suficiente detalle).

Por otro lado, consideramos que un fenómeno es complejo, cuando el modelo que lo describe con un nivel suficiente de detalle es demasiado complicado para ser útil (o cuando no tenemos un modelo conveniente que lo describa totalmente). En este caso, una estrategia inteligente es la de realizar la descripción usando un nivel más alto de abstracción (un nivel inferior de detalle). Así, las predicciones exactas son no siempre aplicables, pero gracias a estos modelos de grano grueso es posible extraer comportamientos generales y mejorar en el entendimiento de los fenómenos. Un ejemplo claro de esto son los modelos económicos (de oferta y demanda, de la bolsa, etc.), donde se asume un nivel alto de abstracción en sus hipótesis y que no pueden suministrar predicciones exactas, pero que proporcionan conclusiones interesantes para los analistas. Mirando su contenido algorítmico de información, estos modelos pueden ser simples (descritos por un número bajo de ecuaciones) o complejos (descritos por un número grande de ecuaciones que modelan el comportamiento dinámico de sus elementos y las interacciones entre estos), pero son siempre de grano grueso en lo que concierne a la realidad que quieren representar.

Por tanto, podemos clasificar los fenómenos y sus descripciones en simples o en complejos. Basándonos en este criterio, esta tesis está organizada en tres partes: modelos en lo simple, modelos en la frontera y modelos en lo complejo. La primera parte está dedicada al desarrollo y al estudio de algunos modelos que representan fenómenos simples. La segunda parte hereda su nombre de un comentario realizado por S. Strogatz en su libro *Dinámica No lineal y Caos* [2]: ... el marco también contiene una región denominada "la frontera". Esta región aparece en aquellos viejos mapas del mundo, donde el autor escribió, "Aquí dragones" sobre las partes inexploradas del globo. Estos temas no están completamente inexplorados, desde luego, pero es justo decir que se encuentran en los límites del conocimiento Por ello, modelos en la frontera se refiere a todos esos modelos de fenómenos que no pueden ser clasificados como simples (porque necesitan un contenido algorítmico de información más elevado en sus descripciones), pero que no pueden ser considerados como complejos, porque en ellos se asume un grado de detalle suficiente como para hacer predicciones exactas. Finalmente, los modelos en lo complejo tratan con aquellos fenómenos que requieren un nivel alto de abstracción. Estos modelos son a veces cuestionables porque están por lo general basados en intuiciones y no tienen en cuenta todas las variables que afectan a un problema particular. Sin embargo, son con frecuencia los más interesantes porque tratan con aspectos que están más cercanos a la realidad humana

Como puede entenderse, esta clasificación es, en cierto modo, subjetiva y probablemente no puede ser aplicada rigurosamente en todas las situaciones. En cualquier caso, es incuestionable que constituye un modo lógico y natural de organizar esta tesis. Si este punto es entendido, los objetivos de esta sección pueden considerarse satisfechos. Si no, probablemente la siguiente sección pueda ser de gran ayuda.

1.3 La nueva ciencia de las redes

Ha habido numerosas tentativas en la comunidad científica para desarrollar un marco matemático conveniente para describir cualquier clase de sistema complejo. Probablemente, la más interesante y completa de todas ellas ha sido la denominada "Nueva ciencia de las redes", que tiene uno de sus exponentes máximos en la persona de A.-L. Barabási. Recientemente, Barabási ha publicado *Linked* [3], su primer libro sobre este tema, que está ganando gran popularidad dentro de la comunidad científica. En este libro, Barabási muestra el extraordinario poder de este instrumento matemático para describir aspectos muy diferentes de la realidad como Internet, el WWW, las relaciones sociales, las interacciones de proteínas en las redes metabólicas de una célula, la economía, etc. Esta capacidad viene del hecho que muchos sistemas complejos están constituidos a partir de componentes similares simples que actúan de un modo complejo. El mejor modo de comprender y describir estos sistemas es a través de un instrumento matemático que se concentre en la estructura de las interacciones y no en las propiedades de sus componentes aislados.

Probablemente, la manera más apropiada para encuadrar esta tesis en una disciplina científica es introduciéndola dentro del marco de la nueva ciencia de las redes.

Esta es la razón por la que es tan importante tratar este tema en la introducción. De hecho, la organización de la tesis sigue un orden lógico si lo miramos desde la perspectiva de las redes. La primera parte, *Modelos en lo simple*, puede ser vista como el estudio y la caracterización de algunos elementos aislados que no interactúan entre sí. En esta dirección, esta parte puede ser concebida como un análisis de los componentes primarios de las redes. La segunda parte, *Modelos en la frontera*, trata principalmente con sistemas compuestos de múltiples elementos simples, pero que interactúan siguiendo una topología de interconexión regular. Finalmente, los *Modelos en lo complejo* son descripciones de sistemas complejos donde la red que describe la estructura de las interacciones es complicada y está esencialmente ligada al comportamiento global del sistema. Por tanto, podríamos haber organizado la tesis a partir de un criterio conexionista, denominando “modelos de componentes aislados^a la primera parte, “modelos de redes regulares^a la segunda y “modelos de redes complejas^a la tercera. En cualquier caso, el resultado habría sido similar al que hemos obtenido utilizando un criterio basado en la complejidad.

1.4 Información, comunicación y no linealidad

Es esencial entender que, aunque el marco más apropiado para esta tesis es la ciencia de las redes (o la ciencia de los sistemas complejos para ser más generales), la fuerza motriz de la investigación que hemos realizado es la exploración de nuevos modos de representar, procesar y comunicar información. La mayor parte de los modelos presentados aquí fueron concebidos como una tentativa de desarrollar o mejorar los paradigmas tradicionales de comunicación y de flujo de información conocidos en nuestros días. Además, en este recorrido, se obtuvieron otros resultados interesantes, que ahora son partes significativas de la investigación que hemos desarrollado. En cualquier caso, el concepto de información, y a veces también el de comunicación, estarán de algún modo presentes en todos los modelos que presentamos.

Debido a esto, un requisito esencial para entender algunos de los capítulos siguientes es el de contar con algunas nociones sobre el concepto de información tal y como fue introducido por Shannon [4]. Por esta razón, hemos incluido en el *Apéndice A* una breve introducción a la Teoría Matemática de la Comunicación que él publicó en 1949. Además, una descripción de algunos conceptos fundamentales usados con frecuencia en la ingeniería de telecomunicación es presentada en el *Apéndice B*, que es también una lectura interesante para el lector no familiarizado con estos temas.

Otro elemento fundamental, que aparece recurrentemente en todos los modelos propuestos, es la presencia de algún tipo de no linealidad. Muchos autores ya han notado la necesidad de que un sistema sea no lineal para que pueda producir un comportamiento complejo. En este sentido, es notable el trabajo de R. Badii [5], quien propone que un sistema complejo es aquel que presenta un comportamiento complicado, y es difícil de modelar usando una estrategia reduccionista de subdivisión sucesiva. Un sistema lineal verifica siempre el principio de superposición, es decir, la respuesta a una suma de excitaciones es la suma de las respuestas. Es, fundamentalmente, esta característica, la que evita que los sistemas lineales puedan presentar

comportamientos complejos, porque la acción conjunta de varias excitaciones no puede presentar ninguna característica diferente a la de la suma de las respuestas aisladas. Por otra parte, los sistemas no lineales no respetan este principio, por tanto no es posible evaluar la respuesta a un conjunto de excitaciones a través de reducciones sucesivas. Esta es la razón básica por la que la no linealidad, con frecuencia, está asociada a comportamientos complicados. Todos los modelos propuestos en esta tesis presentan algún tipo de no linealidad. Debido a esto, comportamientos extraños e interesantes aparecen en muchos de ellos como por ejemplo: dinámicas caóticas, resonancia estocástica, transiciones de fase, etc. Ninguno de estos comportamientos puede ser reproducido dentro del marco de los sistemas lineales.

Parte I

Modelos en lo simple

Capítulo 2

El potencial de doble pozo

2.1 Introducción

Como Shannon demostró [4], cualquier sistema capaz de albergar información debe poseer un cierto grado de incertidumbre. Por tanto, el sistema físico más simple capaz de almacenar información debería tener, como mínimo, dos estados diferentes, porque la incertidumbre no sería posible si no existiesen al menos dos opciones posibles. Hay un amplio abanico de sistemas que verifican este criterio, pero seguramente, el más simple de todos ellos es el potencial de doble pozo. Este tipo particular de sistema ha recibido una atención especial en la literatura científica durante los últimos años. La configuración más habitual y más profundamente estudiada de estos sistemas es la simétrica, que puede ser descrita por un potencial cuártico de la forma

$$V(x) = \frac{h}{L^4}x^4 - \frac{2h}{L^2}x^2. \quad (2.1)$$

Como puede ser observado en la Fig. 2.1, h es la profundidad de los pozos y $2L$ es la separación entre sus dos mínimos. Observe que con esta definición, $V(L) = V(-L) = -h$.

Puede demostrarse que este sistema tiene sólo dos estados estables, que corresponden con cada uno de los dos mínimos de la ecuación del potencial. Por tanto, tenemos sólo dos posibilidades para el estado de una partícula sometida a este potencial: caer en el pozo izquierdo o caer en el derecho. Como consideramos un sistema completamente simétrico, es razonable asumir que la probabilidad de que la partícula esté en uno de los dos pozos es $p = q = 0.5$. Así, aplicando la fórmula de Shannon (consultar el Apéndice A), la entropía total (la información) contenida en este sistema es

$$H(X) = -p \log p - q \log q = 1 \text{ bit} \quad (2.2)$$

Esto significa que un potencial de doble pozo simétrico es un sistema capaz de almacenar un bit de información. Esta propiedad ya ha sido usada en algunas interesantes deducciones teóricas sobre los límites fundamentales de la información en relación con la energía y la entropía de los sistemas físicos [7].

Basándonos en estas ideas, en este capítulo usamos el doble pozo como un ejem-

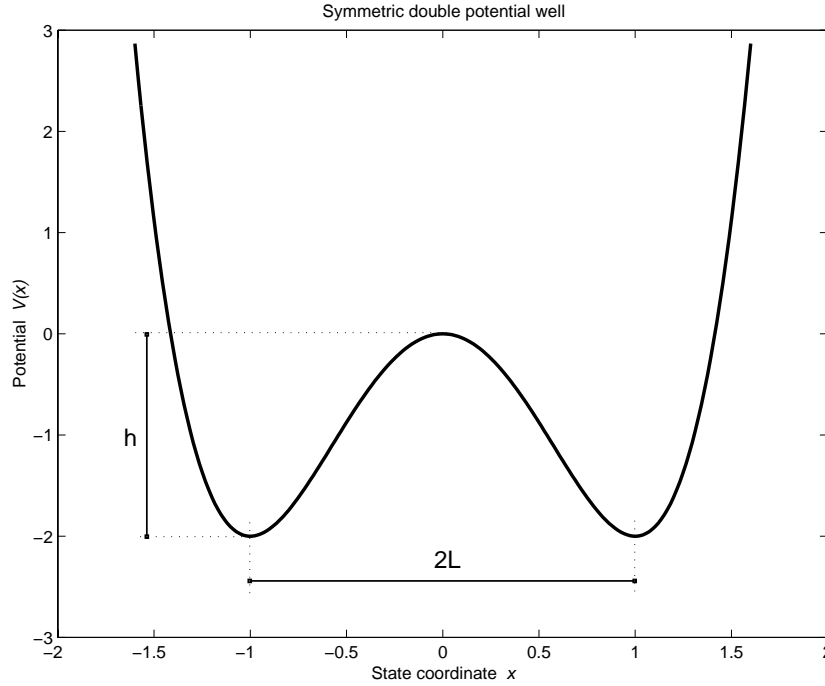


Figura 2.1. *Potencial de doble pozo simétrico de anchura $2L$ y altura h .*

pló paradigmático de sistema simple no lineal capaz de almacenar información. En esta dirección, nuestro objetivo es investigar las propiedades de sistemas no lineales en relación con la información y la comunicación. Con este objetivo, definimos un modelo de comunicación basado en el doble pozo y estudiamos las propiedades especiales de la capacidad de información en el mismo. Finalmente, exploramos la viabilidad de usar tal sistema desde un punto de vista ingenieril, comparando su funcionamiento con el que del filtro adaptado: el mejor receptor lineal, que es frecuentemente utilizado en la tecnología actual.

2.2 Un modelo de comunicación

La relación de los dobles pozos con la teoría de la información no se detiene en su capacidad para albergar entropía; la biestabilidad puede ser explotada para desarrollar un sistema receptor de telecomunicación no lineal, si aprendemos a utilizar su dinámica natural. Es posible mostrar que la dinámica de una partícula dentro del pozo puede ser descrita, en la situación de límite sobreamortiguado, por una ecuación de la forma

$$\dot{x} = \frac{4h}{L^2}x - \frac{4h}{L^4}x^3 + \hat{s}(t) \quad (2.3)$$

donde $\hat{s}(t)$ representa una perturbación externa (fuerza) aplicada sobre la partícula. La clave para comprender cómo es posible aplicar este tipo de sistema en telecomunicaciones está justamente en esta perturbación externa. Imaginemos que $\hat{s}(t)$ toma

la forma de un tren de pulsos positivos y negativos de amplitud $+A$ y $-A$. Un pulso negativo empuja la partícula, tratando de hacerla caer en el pozo izquierdo; mientras que un pulso positivo selecciona el derecho. Puede ser demostrado que el pulso debe estar por encima de un valor umbral para ser capaz de producir realmente un salto entre los pozos, este umbral, que depende de la geometría de los pozos, puede ser evaluado como: [8]

$$A_{th} = \frac{8}{\sqrt{27}} \frac{h}{L} \quad (2.4)$$

Por tanto, para pulsos con A sobre el umbral, el estado (el pozo en el que la partícula acaba cayendo a largo plazo) está completamente determinado por el signo del pulso. Esta propiedad será usada en las secciones siguientes para diseñar un modelo de sistema de comunicación basado en el doble pozo de potencial.

2.2.1 Modulación por impulsos de código

Para entender como las propiedades de los dobles pozos pueden ser relacionadas con los sistemas de telecomunicación, debemos introducir un concepto extensamente usado en comunicaciones: la Modulación por impulsos de código (Pulse Coding Modulation - PCM). El PCM ha sido estudiado en la ingeniería [6] como un método esencial de comunicaciones digitales. La idea principal subyacente tras esta técnica es la de representar la información generada por una fuente discreta, codificándola sobre la amplitud de una forma de onda particular. El tipo de onda puede ser diferente según el tipo de código de línea escogido, sin embargo, el más natural, que usamos en nuestra discusión, es la configuración binaria en banda base con modulación bipolar. En este caso, se supone que la fuente discreta de información es binaria. Por tanto, sólo se pueden generar dos clases diferentes de símbolos, que por lo general vienen representados por los dígitos binarios 0 y 1. El emisor modula cualquiera de los dos símbolos con dos formas de onda de pulso bipolares de duración T . Bipolar significa que ambos pulsos tienen amplitud A , pero signos diferentes: $+A$ para uno de ellos y $-A$ para el otro. Por lo general, la polaridad $-A$ es usada para representar un 0 lógico, mientras que $+A$ es la polaridad asociada al 1. Así, podemos decir que cada dígito b_i binario (donde $b_i = 0, 1$) tiene asociada una señal $S_{b_i}(t)$ (que es un pulso de amplitud de $-A$ para S_{b_0} y $+A$ para S_{b_1}). Considerando que un mensaje digital es una secuencia de bits, este puede ser representado como una función discreta de la forma

$$m[n] = \sum_{i=0}^{i=N-1} b_i \delta[n - i] \quad (2.5)$$

donde b_i representa el $i^{ésimo}$ bit generado, N es la longitud del mensaje (el número de bits) y $\delta[n]$ es la función delta discreta. Cualquier mensaje de este tipo puede ser asociado, utilizando la codificación PCM, a una onda continua de la forma

$$M(t) = \sum_{i=0}^{i=N-1} S_{b_i}(t - iT). \quad (2.6)$$

Un ejemplo del mecanismo de codificación PCM es mostrado en la Fig. 2.2. Como puede observarse, $M(t)$ es, en general, una señal aperiódica que puede ser transmitida por un canal en banda base. Más tarde, cuando llega al receptor, la señal es demodulada tratando de obtener los símbolos binarios generados originalmente por la fuente de información.

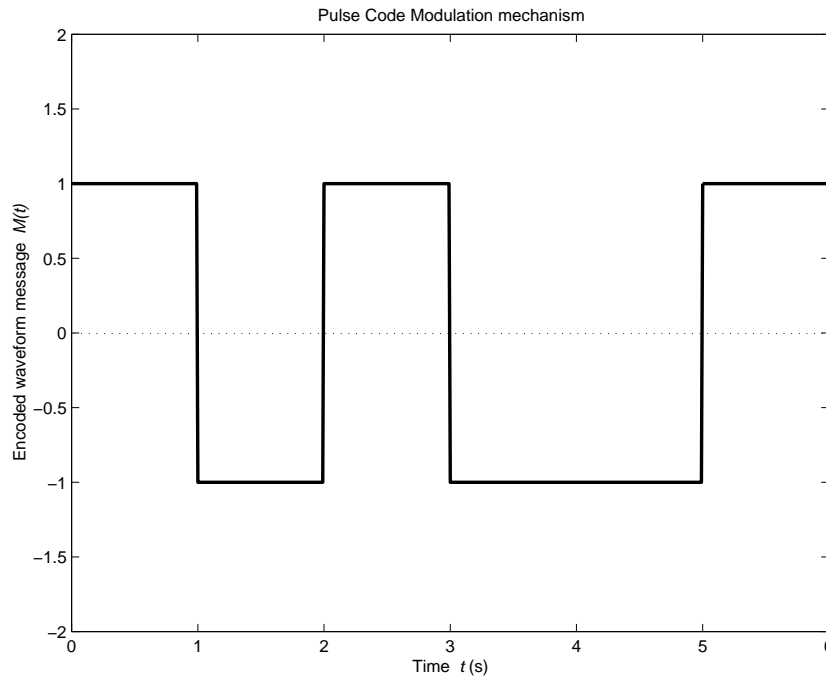


Figura 2.2. *Ejemplo de una modulación bipolar PCM con pulsos de amplitud $A = 1$ y duración $T = 1$ para el mensaje digital binario 101001.*

2.2.2 El receptor de doble pozo

Los dispositivos de comunicación tradicionales recuperan la información de una señal PCM a través de un tipo particular de sistema lineal denominado filtro adaptado (consultar el Apéndice B), que, por lo general, se realiza en la práctica como un correlador. Sin embargo, en nuestro caso, proponemos un receptor no lineal basado en un potencial de doble pozo sobreamortiguado. Para alcanzar este objetivo, debemos utilizar de manera apropiada la dinámica natural del doble pozo para ser capaces de recuperar la información. Esto puede llevarse a cabo simplemente substituyendo en la Ec.(2.3) la fuerza externa $\hat{s}(t)$ por la señal de información $M(t)$ definida en la Ec.(2.6). Como adelantamos antes, la variable de estado del pozo es capaz de seguir la polaridad de un tren de pulsos cuando las amplitudes A están sobre el umbral A_{th} presentado en la Ec.(2.4). Para que la partícula sea capaz de pasar al estado deseado, es también necesario que el tiempo de relajación del pozo sea, al menos, del mismo orden que la duración T de los pulsos. En esta situación, el doble pozo

transforma la señal $M(t)$ en la variable de estado $x(t)$ dada por la Ec.(2.3), que representa la posición de la partícula conducida por la fuerza externa aplicada. Para lograr un proceso de comunicación, es necesario recuperar los bits transmitidos a partir de $x(t)$. Con este objetivo, podemos definir una nueva señal de cuantificación de dos estados, que recupera el pozo apropiado en el que se localiza la partícula en cada momento

$$y(t) = \text{sign}[x(t)], \quad (2.7)$$

Sin embargo, sólo con $y(t)$ no es posible recuperar los bits, porque esta señal puede tomar varios valores diferentes durante la duración del pulso. Para evitar este problema, establecemos una temporización estricta usando un tipo particular de señal llamada, en el contexto de la electrónica, el reloj o clk . Esta señal es una señal periódica cuadrada, que puede ser descrita por la ecuación siguiente

$$clk(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (kT, kT + \frac{T}{2}) \\ 0 & \text{si } t \in (kT + \frac{T}{2}, kT), \end{cases} \quad (2.8)$$

donde k es un número entero. La señal clk está sincronizada con $M(t)$, de modo que cada cambio en esta última (cada pulso) sólo pueda ser emitido en el flanco positivo de clk . Considerando que el tiempo de relajación del pozo es del orden de T , es razonable aceptar que, cuando un nuevo pulso es emitido, la señal $x(t)$ debe estar cerca del punto de equilibrio. Esto permite recuperar fácilmente los bits transmitidos por la señal $y(t)$ simplemente mirando su estado en el flanco positivo de clk . Así, si $y(t) > 0$ en el flanco positivo, diremos que el bit recibido \hat{b} es un 1 lógico, por otra parte, si $y(t) < 0$, $\hat{b} = 0$. Para clarificar estas ideas, la Fig. 2.3 representa el modelo completo de comunicación propuesto.

Usando este esquema, podemos evaluar la capacidad del canal en función de la amplitud de los pulsos A . La capacidad puede ser calculada usando la fórmula siguiente (consultar el Apéndice A)

$$C = 1 + p_{err} \log p_{err} + (1 - p_{err}) \log (1 - p_{err}), \quad (2.9)$$

donde p_{err} es la probabilidad de error de bit, es decir, la probabilidad de que el bit emitido b_i sea diferente del bit recibido \hat{b}_i . Esta probabilidad puede ser escrita en términos de la probabilidad condicional como

$$p_{err} = p(\hat{b}_i = 0)p(b_i = 1/\hat{b}_i = 0) + p(\hat{b}_i = 1)p(b_i = 0/\hat{b}_i = 1), \quad (2.10)$$

y también de manera equivalente como

$$p_{err} = p(b_i = 0)p(\hat{b}_i = 1/b_i = 0) + p(b_i = 1)p(\hat{b}_i = 0/b_i = 1), \quad (2.11)$$

Como puede observarse en la Fig. 2.4, para valores de $A < A_{th}$, la capacidad de la información del canal es cero. Esto es debido a que la partícula no tiene bastante energía para saltar de un pozo al otro y permanece siempre sobre la misma posición. Considerando que la probabilidad de que la fuente produzca un 1 lógico y un 0 lógico es la misma ($p = q = 0.5$), es fácil demostrar que $p_{err} = 0.5$ y

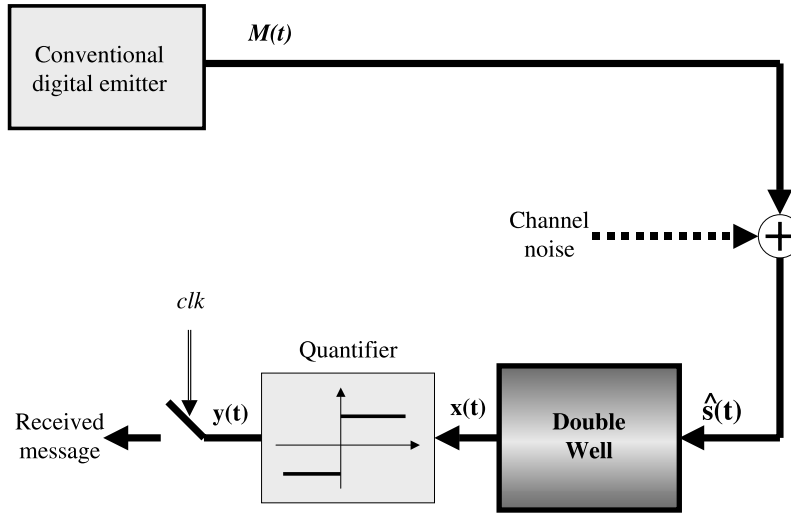


Figura 2.3. Esta figura representa el esquema de comunicación propuesto para nuestro sistema. La información es transmitida usando técnicas convencionales PCM. En recepción, un doble pozo transforma la señal recibida $\hat{s}(t)$ en la coordenada de estado x , que entonces es cuantificada generando $y(t)$. Finalmente, los bits recibidos son obtenidos muestreando $y(t)$ en cada flanco positivo de la señal clk .

así, usando la Ec.(2.9), la capacidad de información de este canal es $C = 0$. Por otra parte, cuando $A > A_{th}$, como no hay ninguna perturbación sobre el canal, la partícula siempre salta al pozo apropiado, verificando que $p(\hat{b}_i = 1/b_i = 1) = 1$ y $p(\hat{b}_i = 0/b_i = 0) = 1$, lo que implica que $p_{err} = 0$. Por tanto, la tasa de transmisión en este caso es $C = 1 \text{ bit/simbolo}$ o equivalentemente $C = \frac{1}{T} \text{ bits/s}$ (dado que transmitimos $\frac{1}{T} \text{ simbolos/s}$).

A partir de estos resultados, podemos entender que cuando $A > A_{th}$, el sistema de comunicación propuesto se comporta como un canal discreto sin ruido tal y como lo introdujo Shannon. Aunque esto sea una conclusión notable e interesante, no es algo nuevo en ingeniería. Todos los sistemas de comunicación convencionales digitales basados en receptores lineares pueden reproducir el comportamiento de canales discretos sin ruido cuando no hay ninguna perturbación en el medio de transmisión. Sin embargo, nuestro interés en el doble pozo no ha surgido por sus ventajas como canal discreto sin ruido. Lamentablemente, a la naturaleza no le gustan los canales sin ruido, y todos los dispositivos de telecomunicación prácticos deben tener este efecto en cuenta en el proceso de transmisión. El hecho de que el doble pozo se comporte de un modo no lineal es el origen de algunos fenómenos interesantes que no pueden presentarse en sistemas lineales. Nuestro objetivo en las secciones siguientes es analizar algunos de ellos y determinar si es posible aprovechar

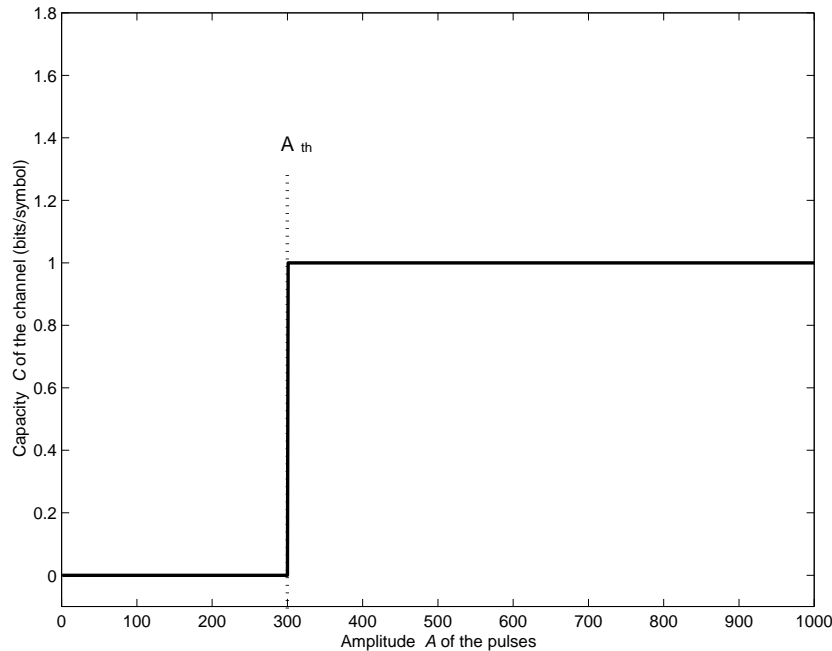


Figura 2.4. Capacidad de Shannon C de un canal sin ruido binario basado en un receptor de doble pozo no lineal. Como puede observarse, para valores de la amplitud A por debajo de A_{th} no se produce ninguna transmisión de información. Por otro lado, para valores por encima de A_{th} , toda la información contenida en los símbolos emitidos es transmitida por el canal.

estas propiedades para mejorar los dispositivos de comunicación usados en nuestros días.

2.3 Resonancia estocástica y capacidad de información

Tradicionalmente, el efecto del ruido en electrónica ha sido considerado un fenómeno perjudicial, principalmente para los ingenieros eléctricos y electrónicos que trabajan en el desarrollo de dispositivos de telecomunicación. En el marco de la teoría de sistemas lineales, un aumento en la potencia de ruido siempre implica una degradación de la calidad de recepción [6]. Por tanto, como los sistemas de comunicación tradicionales están basados en principios lineales, su diseño persigue la minimización del efecto del ruido. Por otra parte, los sistemas no lineales muestran comportamientos extraños e interesantes en relación con el ruido, que son conocidos en la literatura científica. Uno de los más interesantes es la resonancia estocástica (Stochastic Resonance - SR), un fenómeno que aparece en algunos tipos de sistemas no lineales, cuya característica principal es que el procesamiento de una señal es mejorado cuando la relación señal a ruido disminuye en la entrada.

El fenómeno de la resonancia estocástica ha sido estudiado profundamente en la literatura científica [9, 10, 11], principalmente cuando la perturbación aplicada

toma la forma de ruido aditivo blanco Gaussiano (Additive White Gaussian Noise - AWGN), que es conocido por ser la clase más importante de ruido en los fenómenos físicos, incluyendo la transmisión de señales sobre canales. La resonancia estocástica es muy común en la naturaleza, aparece en ámbitos muy diferentes como láseres [14], circuitos electrónicos y magnéticos [15, 16, 17], modelos neuronales y fisiológicos [18, 19, 20], etc. Aunque todos estos temas sean fascinantes, nuestro interés está concentrado en uno de los sistemas más simples que presentan SR: el potencial de doble pozo.

Las propiedades del potencial de doble pozo en relación con la resonancia estocástica han sido ampliamente estudiadas en los últimos años [21]. Nuestro objetivo, sin embargo, es estudiar este fenómeno en el contexto de la teoría de la información a través del modelo de comunicación que propusimos en la sección precedente. Para lograrlo, debemos tener en cuenta el ruido $\xi(t)$, que asumiremos está presente en el canal. Así, la señal recibida $\hat{s}(t)$ introducida en la Ec.(2.3) ya no puede ser definida sólo en términos de la señal emitida $M(t)$ de la Ec.(2.6), como hicimos antes. Considerando que el ruido es AWGN, su efecto debe ser aditivo, de modo que $\hat{s}(t) = M(t) + \xi(t)$. Esta clase de problemas ya ha sido tratada en la literatura, principalmente considerando que $M(t)$ es una excitación periódica [22]. Sin embargo, en nuestra situación, $M(t)$ no puede ser periódica, porque debe llevar información para poder comunicar, y las señales periódicas son fácilmente predecibles y no contienen ninguna entropía. El caso de señales aperiódicas también ha sido tratado [23], pero los resultados analíticos en esta situación no son siempre posibles. Por esta razón, realizaremos un acercamiento similar al presentado en [24] para evaluar la capacidad de información de nuestro canal de comunicación no lineal.

Considerando que el período T de los pulsos en $M(t)$ es comparable a los tiempos de relajación intra-pozo y extra-pozo de la Ec.(2.3), que la señal de ruido $\xi(t)$ es Gaussiana con media nula y que los pulsos de $M(t)$ son simétricos así como los pozos; puede ser demostrado [24] que el modelo de comunicación propuesto es equivalente a un canal sin memoria simétrico binario, tal como fue definido por Shannon (consultar el Apéndice B). Así, la capacidad del canal puede ser evaluada en términos de la probabilidad de error de bit p_{err} con la expresión propuesta en la Ec.(2.9).

Hemos realizado una simulación de este sistema utilizando el algoritmo de Euler sobre la Ec.(2.3). Con ello, hemos estimado la probabilidad de error de bit p_{err} sobre un número grande de emisiones sucesivas de símbolos de la fuente b_i , que ocurren como variables aleatorias independientes equiprobables. La capacidad de canal C ha sido evaluada según la Ec.(2.9). Los resultados se muestran en la Fig. 2.5. En esta imagen, podemos observar un fenómeno muy interesante. En términos de capacidad de información, para valores de la amplitud sobre el umbral, el efecto del ruido es siempre el de degradar el proceso de comunicación. Para entender por qué, obsérvese que para las curvas *a)* y *b)*, donde $A > A_{th}$, la tasa de transmisión más alta, $C = 1 \text{ bit/simbolo}$, es alcanzada cuando el ruido tiende a cero. Por otra parte, para las curvas *c)* y *d)*, donde $A \leq A_{th}$, existe un valor particular de la potencia de ruido σ^2 que maximiza la capacidad del canal no lineal.

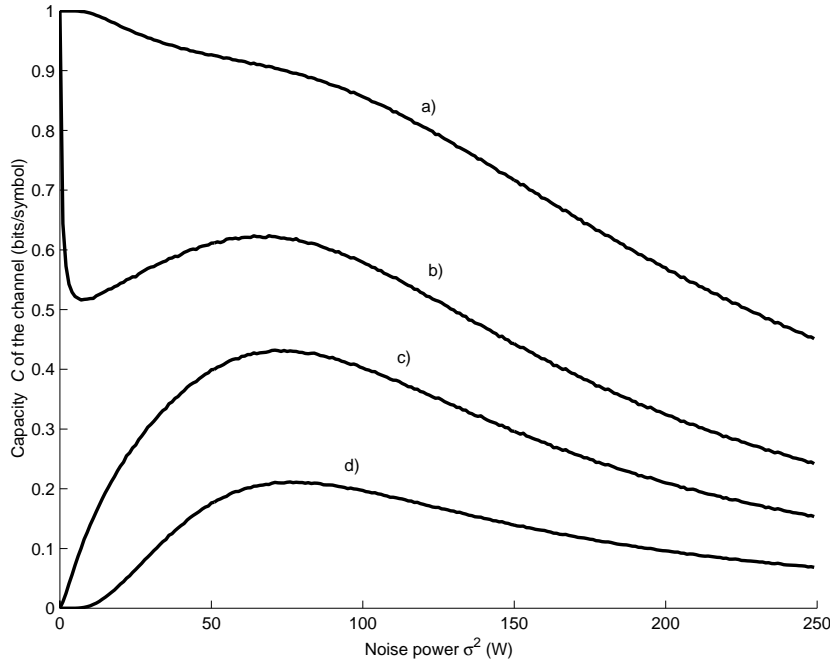


Figura 2.5. Esta figura muestra la capacidad de información de un canal no lineal basado en un receptor de doble pozo como el definido en la Ec.(2.3). En a) la curva ha sido calculada para una amplitud de los pulsos A mucho más grande que el valor de umbral, A_{th} , en b) consideramos un valor de A ligeramente sobre A_{th} , c) tiene $A = A_{th}$ y finalmente, en d) $A < A_{th}$. Las características del pozo son descritas en términos de la Ec.(2.1) por $h = 1$ y $L = 1$. Las simulaciones se han realizado para 250 diferentes valores de la potencia de ruido σ^2 , con 10^6 bits arbitrarios enviados para cada valor del ruido. En todos los casos $\Delta t = 20$ ms y $T = 1.5$ s.

2.4 Aplicaciones a las comunicaciones digitales

Una vez que hemos demostrado que un canal de comunicación basado en un receptor de doble pozo es viable, sería interesante investigar si puede tener algunas aplicaciones en el campo de la ingeniería de telecomunicación. Esta posibilidad es muy sugerente, porque el fenómeno de resonancia estocástica indica que es posible mejorar la calidad de recepción para algunos valores particulares de la intensidad de ruido. Para evaluar las ventajas que puede tener este nuevo acercamiento, es necesario comparar la calidad de esta clase de sistemas con los convencionales usados por los ingenieros. El parámetro principal que se suele utilizar para medir la calidad, en el marco de los sistemas de comunicación digital, es la probabilidad de error de bit p_{err} , que por lo general es expresada como una función de la relación señal a ruido, (Signal to Noise Ratio - SNR) (consultar el Apéndice B).

La probabilidad de error de bit p_{err} depende de la forma del pozo (L y h) y de la potencia de la señal y del ruido. La evaluación analítica de p_{err} como una función de

estos parámetros es una tarea muy complicada que está fuera de los objetivos de este trabajo. Sin embargo, para ilustrar las capacidades del sistema, podemos realizar algunas simulaciones numéricas, que podrían darnos alguna información interesante. El conjunto de imágenes representadas en la Fig. 2.6 muestra la calidad de un doble pozo de potencial en términos de la probabilidad de acierto $p_{acc} = 1 - p_{err}$. Cada imagen ha sido evaluada para un valor diferente de la SNR , que aumenta de izquierda a derecha y de arriba abajo. El eje x representa la altura h de los pozos, el eje y representa la anchura L entre los pozos y el eje z representa p_{acc} . Como puede ser observado, la calidad de recepción depende fuertemente de la forma del pozo. Para todas las imágenes es posible encontrar un valor particular de L y h que maximiza la calidad de las comunicaciones (reduciendo al mínimo p_{err}).

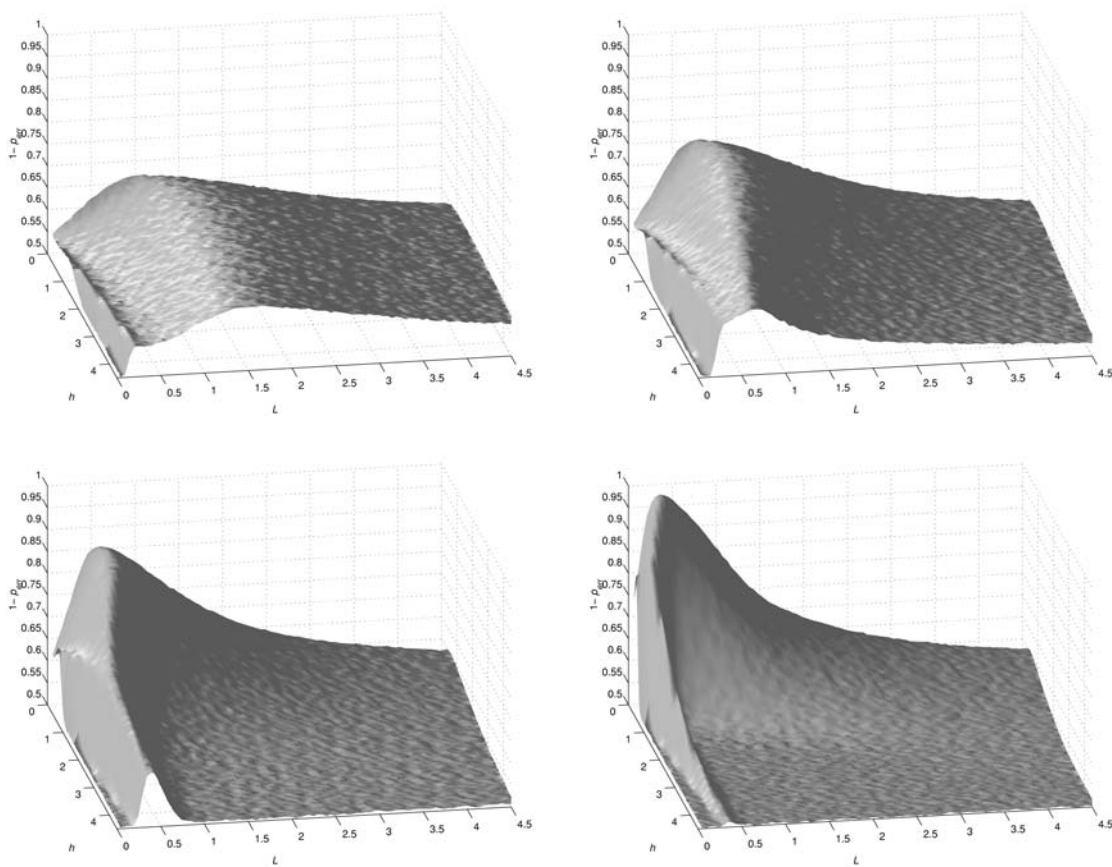


Figura 2.6. Cada imagen representa la probabilidad de acierto ($p_{acc} = 1 - p_{err}$) sobre un receptor de doble pozo para valores diferentes de la relación señal a ruido. El eje x representa la altura h de los pozos, el eje y representa la anchura L entre los pozos y el eje z representa p_{acc} . La SNR aumenta de izquierda a derecha y de arriba a abajo. En todas las figuras es posible obtener una forma de pozo que maximice la calidad de recepción. Las simulaciones han sido realizadas para 70×70 valores diferentes de h y L y para 4 valores diferentes de la SNR sobre una secuencia de 10^6 bits.

Como ya hemos adelantado, para determinar si esta clase de sistemas puede tener aplicaciones en la práctica es necesario compararlos con los métodos convencionales usados en ingeniería. En comunicaciones digitales, el tipo de receptor más usado es el filtro adaptado (consultar el Apéndice B). Un receptor de doble pozo podría tener aplicaciones muy interesantes si mejorase la calidad del filtro adaptado, incluso si esta mejora se produce solamente en una región de parámetros particular. Para verificarlo, un posible acercamiento es el de seleccionar unas condiciones de comunicación (potencia de señal y de ruido) y buscar, para ese caso, los valores de L y h que minimicen p_{err} . Entonces, podremos comparar su valor con el obtenido usando un filtro adaptado en condiciones de comunicación idénticas. El problema con este método es que debe estar completamente basado en simulaciones. Por tanto, podemos demostrar la aplicabilidad de nuestro receptor sólo si encontramos una región de parámetros particular en la que el doble pozo mejore al filtro adaptado, pero no se puede afirmar lo contrario simplemente porque que no la encontremos. Lamentablemente, las simulaciones muestran que para las condiciones de comunicación más comunes, el filtro adaptado es siempre mejor que el receptor de doble pozo. Por tanto, no es posible extraer ninguna conclusión interesante a través de este método. En cualquier caso, este resultado sugiere que existen sólo dos posibilidades, o bien el doble pozo mejora al filtro adaptado sólo en unas condiciones de comunicación muy particulares, o bien no lo mejora en ninguna situación posible. Después de miles de horas de CPU tratando de verificar la primera posibilidad, comenzamos a pensar que la verdadera es la segunda. No tenemos una demostración formal para esta conjetura, pero es posible confirmarla intuitivamente siguiendo un conjunto de argumentos razonables.

Para comprender por qué pensamos que el doble pozo nunca mejorará al filtro adaptado, es necesario primero definir una nueva clase de receptor de doble pozo con una dinámica ligeramente diferente. La evolución de la variable de estado en un doble pozo viene, por lo general, descrita por la expresión dada en la Ec.(2.3). En esta situación, asumimos que el estado x del pozo comienza en una condición inicial particular dada, x_0 , y después evoluciona siguiendo su propia dinámica conducida por la señal de entrada $\hat{s}(t)$. Esto significa que el valor de x en el flanco positivo de la señal clk no sólo depende del bit particular llevado por $\hat{s}(t)$, sino también del estado inicial del pozo en ese período particular. Teniendo en cuenta estos resultados, podemos decir que el receptor convencional de doble pozo tiene memoria, porque la probabilidad de recibir correctamente un bit particular depende de la información recibida con anterioridad. Usando un paradigma similar, podemos definir una nueva clase de receptor de doble pozo sin memoria, cuya dinámica también viene regida por la Ec.(2.3), pero en una aproximación bit-por-bit. Esto significa que la coordenada de estado x de la Ec.(2.3) es reinicializada en cada límite de bit (sobre cada flanco positivo de la señal clk). En este caso, el valor de reset, x_0 , debe ser igual a cero, porque en cualquier otro caso, una polaridad de bit particular sería beneficiada.

Considerando estos dos receptores con memoria y sin memoria, ahora queremos comparar la calidad de comunicación que puede ser alcanzada usando cada uno de ellos. Para esto, proponemos un conjunto de simulaciones computacionales que

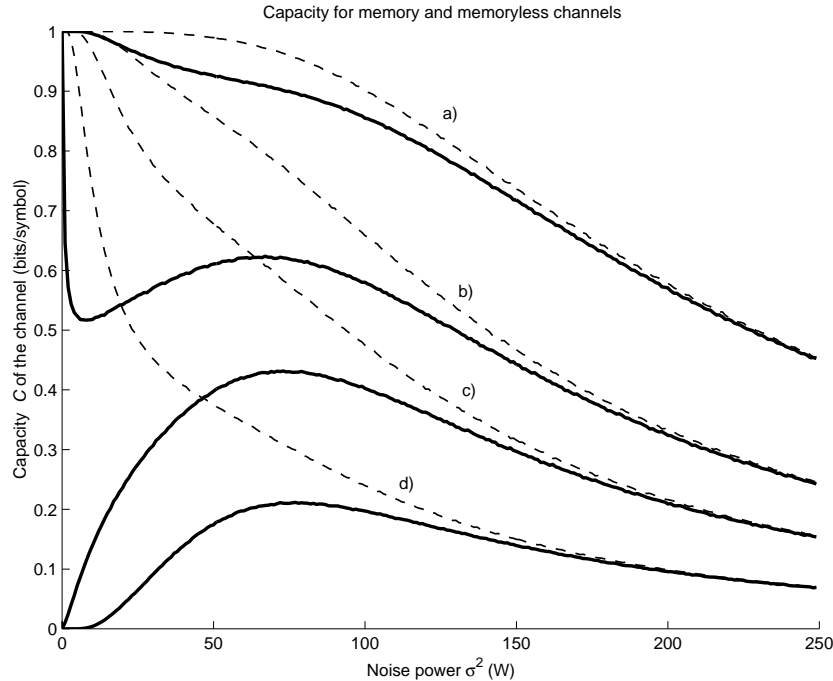


Figura 2.7. La figura representa la capacidad de información para receptores de doble pozo con memoria (línea sólida) y sin memoria (línea discontinua) en cuatro condiciones diferentes. En a) la curva ha sido calculada para una amplitud de los pulsos A mucho más grande que el valor de umbral A_{th} , en b) consideramos que un valor de A ligeramente sobre A_{th} , c) tiene $A = A_{th}$ y finalmente, en d) $A < A_{th}$. Las características del pozo vienen descritas en términos de la Ec.(2.1) por $h = 1$ y $L = 1$. Como puede ser observado, en todas las situaciones, la capacidad de la información para el receptor sin memoria es más elevada que la del doble pozo convencional.

consisten en el procedimiento siguiente. Primero, definimos las propiedades del canal escogiendo un valor particular para las potencias de la señal y del ruido, entonces, enviamos una secuencia de bits a través de este canal. La respuesta del canal es entonces inyectada en dos receptores diferentes: uno con memoria y otro sin memoria. Después de esto, es posible evaluar la capacidad de la información para cada uno de ellos. Como puede ser observado en la Fig. 2.7, la capacidad del receptor sin memoria está siempre sobre la obtenida usando un doble pozo convencional. En términos de probabilidad de error de bit, esto significa que el esquema sin memoria recibe siempre con menor número de errores, lo que implica una mejora de la calidad de comunicación.

Una vez que hemos mostrado que el funcionamiento del receptor sin memoria es siempre mejor que el obtenido usando un doble pozo convencional, vamos a estudiar con cuidado esta primera clase de receptor para investigar cuales son las condiciones apropiadas que conducen a una mayor calidad de comunicación. En particular, es

esencial recordar que, en este caso, la evolución dinámica, viene descrita, en una aproximación bit-por-bit, por la expresión dada en la Ec.(2.3)

$$\dot{x} = \frac{4h}{L^2}x - \frac{4h}{L^4}x^3 + \hat{s}(t), \quad (2.12)$$

donde h es la altura de los pozos, $2L$ la separación entre sus mínimos y $x = 0$ al comienzo de cada bit. Análogamente a lo que sucede en un receptor con memoria, la forma del pozo, descrita por h y L , tiene también una influencia importante sobre el funcionamiento final. En particular, queremos concentrar nuestra atención en el estudio de la influencia de las variaciones de L sobre la probabilidad de error de bit. La razón de este interés particular es la siguiente. Si aumentamos L en un receptor particular, la evolución dinámica de x está cada vez menos dirigida por el aspecto de los pozos, y cada vez más determinada por la perturbación externa. Si observamos la Ec.(2.12) en el caso límite $L \rightarrow \infty$, la expresión puede ser aproximada por

$$\dot{x} = \hat{s}(t), \quad (2.13)$$

que es equivalente a

$$x(t) = \int_T \hat{s}(t) dt, \quad (2.14)$$

siendo T la duración de cada bit. Como hemos asumido que la señal emitida, $s(t)$, es constante para cada bit, la expresión de la Ec.(2.14) puede ser vista como (proporcional a) la salida de un correlador entre $s(t)$ y $\hat{s}(t)$. Es conocido (consultar el Apéndice B) que el filtro adaptado puede ser implementado en la práctica como un correlador, que, en este caso, tendría una expresión similar a la dada en la Ec.(2.14). Usando estos argumentos, es posible mostrar que el filtro adaptado es una situación límite para el receptor sin memoria cuando L se hace grande. Esto tiene una consecuencia importante en términos de prestaciones, porque, como se muestra en la Fig. 2.8, la probabilidad de error de bit de un receptor sin memoria siempre mejora cuando L aumenta.

Usando los argumentos precedentes, concluimos que el receptor de doble pozo nunca mejorará al filtro adaptado. Esto parece lógico si seguimos nuestra cadena de argumentos: hemos demostrado que el doble pozo es siempre peor que el sistema sin memoria, que, a su vez, es siempre peor (o igual en el límite $L \rightarrow \infty$) que el filtro adaptado.

2.5 Conclusiones

En este capítulo, hemos demostrado que es posible definir un esquema de telecomunicación digital que usa un receptor no lineal basado en un doble pozo. Empleando teoría de la información, hemos evaluado su contenido de entropía y su capacidad de información. Gracias a este análisis, hemos mostrado que, debido a su dinámica intrínsecamente no lineal, este tipo de sistemas manifiesta comportamientos nuevos e interesantes, como la resonancia estocástica sobre la capacidad de información, que no es posible en dispositivos convencionales lineales.

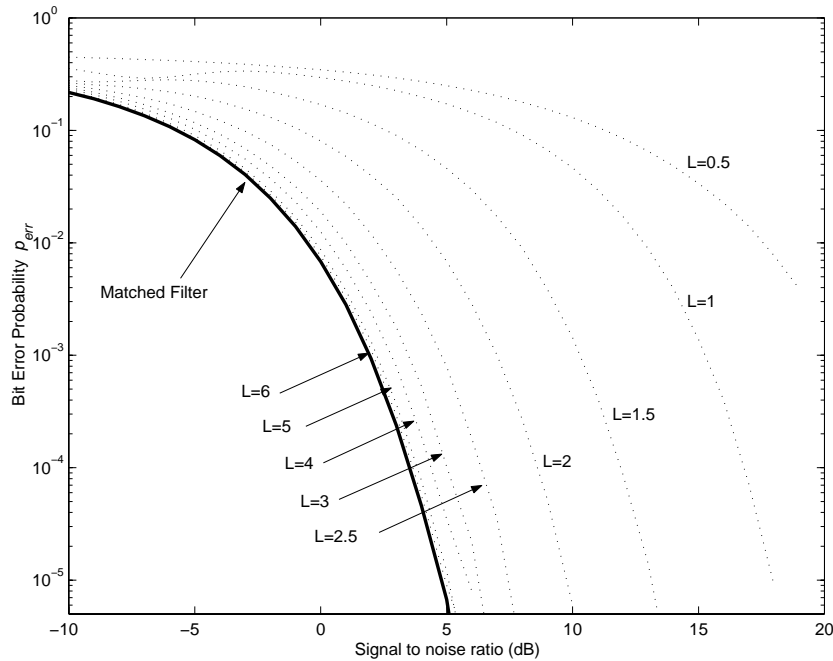


Figura 2.8. La figura representa, en líneas discontinuas, la probabilidad de error de bit p_{err} de un receptor sin memoria como una función de la SNR para 9 valores diferentes de la anchura L entre los pozos. La p_{err} de un filtro adaptado también es representada en línea sólida. Como puede ser observado, la calidad de comunicación con el receptor sin memoria mejora cuando el valor de L aumenta. En la situación límite $L \rightarrow \infty$ las prestaciones son idénticas a las del filtro adaptado. Esto significa que cualquier receptor de doble pozo que sea realmente no lineal es peor, como sistema receptor de telecomunicación digital, que el filtro adaptado.

Estos resultados tienen un interés teórico profundo y, en principio, parecen tener aplicaciones prometedoras en la práctica. La presencia de ruido es el problema más importante que evita el aumento de la calidad y la velocidad en muchos sistemas de telecomunicación como los de telefonía digital celular, radioenlaces vía satélite, etc. Por esta razón, la idea de un receptor digital que mejore su calidad cuando el ruido de canal aumenta sugiere la posibilidad de aplicar la resonancia estocástica en este campo. Sin embargo, como hemos ilustrado en este capítulo, un análisis cuidadoso muestra que esta clase de receptores no puede desbancar a los dispositivos de telecomunicación convencionales usados en ingeniería. Incluso cuando el ruido del canal es exactamente el que produce el máximo de resonancia, la capacidad del receptor de doble pozo está bajo la del filtro adaptado para las mismas condiciones de comunicación. Por tanto, podemos concluir que hay pocas posibilidades de encontrar aplicaciones realistas de esta clase de receptores. En cualquier caso, esta es una conclusión muy interesante porque demuestra que la línea de investigación propuesta en algunos artículos publicados recientemente [24], es infructuosa desde la perspectiva de la ingeniería de telecomunicación.

Aunque esta conclusión pueda parecer desalentadora, no implica que estos sistemas no sean útiles en otros campos de la ingeniería. De hecho, el fenómeno de la resonancia estocástica parece prometedor para el desarrollo de nuevos tipos de sensores que emulen sistemas biológicos y que pueden ser de gran interés en muchas disciplinas tecnológicas [25].

Finalmente, es interesante comentar que la línea de investigación propuesta en este capítulo no puede considerarse cerrada. En esta dirección, sería muy interesante demostrar matemáticamente la cadena de argumentos que hemos propuesto, y que conducen a la conclusión de que el doble pozo no puede mejorar al filtro adaptado. Las simulaciones realizadas muestran que esta conclusión es correcta en los escenarios más habituales. Sin embargo, la confirmación analítica sería muy importante desde una perspectiva teórica.

Capítulo 3

Comunicaciones usando caos

3.1 Introducción

En el capítulo anterior, estudiamos un modelo simple (con bajo contenido algorítmico de información) de uno de los fenómenos más simples capaces de almacenar información. Como siguiente etapa en nuestro camino hacia la complejidad, proponemos analizar, desde el punto de vista de la teoría de la información, algunos sistemas que presentan la propiedad conocida como caos. Es importante comentar que, en términos de contenido algorítmico de información, los sistemas caóticos de baja dimensión más populares son simples, porque pueden ser descritos por un conjunto de ecuaciones diferenciales simples (en el caso de sistemas continuos) o por un conjunto de ecuaciones recurrentes simples (en el caso de mapas discretos). A pesar de esto, los sistemas caóticos no suelen considerarse como simples, principalmente porque, por lo general, producen respuestas complejas que son con frecuencia difíciles de caracterizar. En este sentido, sería necesario introducir nociones más sofisticadas para definir la complejidad, basándose no sólo en la longitud de la descripción, sino también en el tiempo que un ordenador universal necesita para calcular esta descripción y evaluar su respuesta. Algunos autores llaman a esta noción la *profundidad lógica* [1]. Un ejemplo clásico de esto es el famoso conjunto fractal de Mandelbrot, un sistema caótico que tiene un contenido algorítmico de información sumamente bajo, pero que presenta un comportamiento evidentemente complejo gracias a su elevada profundidad lógica. En este sentido, está justificado que incluyamos los modelos de sistemas caóticos de baja dimensión como modelos en lo simple, porque realmente no tienen una elevada complejidad eficaz, sino una elevada profundidad lógica.

El contenido algorítmico de información permite clasificar nuestros modelos, pero nuestro interés en esta clase de sistemas está principalmente concentrado en su relación con la información y con las comunicaciones. Como ya sabemos, para un observador, una secuencia de acontecimientos contiene información, sólo si estos acontecimientos no son totalmente predecibles. Por otro lado, si uno puede predecir totalmente los acontecimientos futuros, entonces ninguna información puede ser ganada observándolos. Esta idea podría conducir a la percepción errónea de que un sistema determinista no puede actuar como fuente de información. La mayoría de

los sistemas deterministas, principalmente los lineales, presentan comportamientos periódicos o asintóticos que no dejan lugar a ninguna clase de incertidumbre. Sin embargo, la imprevisibilidad inherente a un sistema caótico implica que un observador no puede determinar con precisión la evolución futura del sistema sin realizar una observación continua del mismo. La información obtenida a través de la observación continua no puede ser obtenida a través de una sola medida en un instante dado. En este sentido, podemos afirmar que existe una conexión cualitativa entre el caos y la información.

A finales de los años 50, se demostró que esta conexión es profunda e importante, con el trabajo de Kolmogorov [26] quien reconoció que el espacio de fases de un sistema dinámico puede ser dividido en elementos de volumen. Etiquetando adecuadamente cada elemento, se puede codificar simbólicamente la trayectoria. Así, la evolución dinámica de un sistema caótico puede ser representada por una secuencia de símbolos, de la misma manera que un mensaje es representado en el contexto de la teoría de la información de Shannon. Después de esto, Kolmogorov comprendió que uno puede asociar a cada elemento de volumen i una probabilidad de visita σ_i . Con este conjunto de probabilidades, es posible definir una nueva magnitud que se denominó la entropía de Kolmogorov h_k , que se definió, en analogía con la entropía de Shannon como

$$h_k = - \sum_i \sigma_i \log \sigma_i. \quad (3.1)$$

Es evidente que h_k coincide con la entropía de Shannon de una fuente de información que genere una secuencia correspondiente de símbolos. Estos conceptos fueron ampliados más tarde por Sinaí, que observó que h_k depende de la partición de generación considerada. De este modo, se definió la entropía de Kolmogorov-Sinaí (KS-entropía) como el valor máximo de h_k obtenido para la partición óptima. La KS-entropía es un concepto muy útil porque mide la máxima entropía de Shannon que un sistema caótico puede generar como fuente de información.

Estas definiciones permiten establecer una conexión entre el caos y la información, sin embargo, se podría argumentar que estos conceptos son artificiales y permanecen demasiado abstractos sin una relación clara con las propiedades dinámicas de los sistemas. Este problema fue solucionado por Pesin y Ruelle [27] quienes demostraron un teorema interesante y sugerente que definitivamente mostró la profundidad con la cual la información está inmersa en la dinámica caótica. Demostraron que para ciertas clases de sistemas, incluyendo los mapas unidimensionales, la KS-entropía es igual a la suma de todos los exponentes positivos Lyapunov. Esto era un avance sustancial en la teoría de la información por la razón siguiente. La evaluación de la entropía de Shannon de una secuencia de símbolos generalmente requiere el conocimiento a priori de la distribución de la fuente, cuando esta no es conocida, la entropía no es realmente computable, porque sólo puede ser definida en términos de una observación límite infinita. Gracias a ese teorema, podemos evaluar analíticamente la entropía de Shannon de fuentes caóticas sin ningún conocimiento a priori sobre la distribución de la secuencia de símbolos generada. Por tanto, podemos tomar de la dinámica no lineal la idea de que existe una dualidad entre las

formulaciones deterministas y probabilísticas del comportamiento de un sistema.

Todos los sistemas de telecomunicación modernos están basados, de un modo u otro, en las ideas originales desarrolladas por Shannon. Teniendo en cuenta que este concepto emerge de los sistemas caóticos de un modo bastante natural, es lógico pensar que las técnicas caóticas podrían ser usadas como una tecnología alternativa para poner en práctica dispositivos de comunicación. Ciertamente, en los últimos años, hemos visto una explosión en el número de publicaciones que proponen ideas relativas a sistemas de comunicación basados en el caos [28, 29, 30, 31, 32, 33]. Con estos trabajos, algunas ideas innovadoras fueron desarrolladas, entre ellas, es interesante recuperar un concepto que es esencial para entender el resto de este capítulo: la idea del control de caos. Ya sabemos que una trayectoria caótica puede contener información, pero esto es inútil desde un punto de vista de comunicación, si esta información no es exactamente la que deseamos. Disponer de una conexión digital de alta velocidad, que reciba con una velocidad de algunos gigabits por segundo bits aleatorios, es absolutamente inútil si estos bits no representan información codificada por un remitente inteligente como puede ser, por ejemplo, una imagen, un documento, etc. Para que los sistemas caóticos no generen una información aleatoria y sean eficaces en comunicaciones, tenemos que perturbarlos, de modo que las formas de onda emitidas sigan un patrón deseado. Sin embargo, estas perturbaciones podrían destruir la dinámica intrínseca de los sistemas, rompiendo su relación con la teoría de la información. En este sentido, las técnicas de control de caos permiten satisfacer ambas necesidades: la posibilidad de cambiar las trayectorias y el requisito de respetar sus propiedades dinámicas. Una parte importante de este capítulo está dedicada a analizar y desarrollar nuevas ideas en relación con este tema.

Este capítulo está organizado del modo siguiente. Primero, proponemos un modelo de comunicación basado en el sistema caótico más simple que podemos imaginar: un mapa unidimensional caótico. Utilizándolo, proponemos un esquema de codificación - decodificación, y analizamos su capacidad de información, comparándolo con el máximo teórico posible: el límite de Shannon. En segundo lugar, analizamos las capacidades de comunicación del sistema caótico continuo más popular: el atractor de Lorenz. Proponemos un mecanismo de comunicación basado en él y demostramos que, gracias a la redundancia intrínseca de los sistemas caóticos, es posible proteger la información y descubrir errores en la comunicación. Finalmente, analizamos críticamente los modelos y sus posibles aplicaciones en el ámbito de la ingeniería de telecomunicación.

3.2 Codificación caótica discreta

Nuestro viaje por el campo de comunicaciones caóticas comienza con los sistemas dinámicos más simples que presentan caos: los mapas discretos unidimensionales. Esta clase de sistemas toma ese nombre porque asumimos que el tiempo es discreto. Por tanto, las ecuaciones dinámicas de evolución de estos sistemas no vienen descritas por un conjunto de ecuaciones diferenciales, sino que siguen una ley recurrente que relaciona el valor de las variables de estado en un instante con su valor en las

iteraciones siguientes. Cuando este estado depende de una sola coordenada, se dice que el sistema es unidimensional. El ejemplo más popular de mapa unidimensional es la aplicación logística, que puede ser descrita por la ecuación siguiente

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n). \quad (3.2)$$

No todos los mapas discretos unidimensionales son caóticos. Por ejemplo, es conocido que la aplicación logística presenta caos para algunos valores de λ y es periódica para otros. Nuestro interés, obviamente, está concentrado en las situaciones que presentan un comportamiento caótico. En este sentido, vamos a proponer un tipo particular de mapa caótico que tiene un conjunto de propiedades interesantes que lo hacen el instrumento ideal para ser usado en la codificación de información.

Sin embargo, antes de comenzar, es necesario recordar un concepto relacionado con la teoría de la información que es indispensable para comprender el modelo de comunicación propuesto: la idea de muestreo. La regla más importante sobre el muestreo es el teorema Nyquist, que puede ser resumido de la manera siguiente. Si consideramos una la señal $x(t)$ continua y limitada en banda que no tenga ninguna componente espectral en una frecuencia superior a un determinado límite W , esta señal está completamente descrita especificando su valor en instantes de tiempo separados por $\Delta t = \frac{1}{2W}$. Este teorema tiene una doble implicación. Primero, que cualquier señal $x(t)$ limitada en banda está asociada a una secuencia única x_i de valores discretos separados por Δt . Segundo, que cualquier secuencia de valores discretos separados por Δt está asociada a una señal continua $x(t)$ única en la banda $f \in [0, \frac{1}{2\Delta t}]$.

Esto tiene una interpretación inmediata en el contexto de los mapas unidimensionales caóticos. Considerando una trayectoria caótica (una secuencia discreta de valores x_i) y un Δt , esta secuencia puede ser transmitida en forma de una señal $x(t)$ continua que únicamente estará asociada a nuestra forma de onda discreta. En recepción, la secuencia puede ser recuperada muestreándola otra vez con el mismo Δt . Este principio es el elemento clave que permite que el esquema de comunicación que proponemos en esta sección sea susceptible de ser aplicado en la práctica.

3.2.1 Codificando con el mapa de Baker

El mapa discreto unidimensional que deseamos usar debería emitir una señal caótica capaz de comportarse simbólicamente como una aplicación de Bernoulli. Uno de los mapas discretos más simples que poseen esa característica es el mapa de Baker (representado en la Fig. 3.1) B definido como

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{si } x_n \leq 0.5 \\ 2x_n - 1 & \text{si } x_n > 0.5. \end{cases} \quad (3.3)$$

El hecho que este sistema se comporte como una aplicación de Bernoulli [34] indica que este mapa tiene la capacidad de producir cualquier secuencia deseada de símbolos que representen un mensaje, simplemente introduciendo pequeñas perturbaciones en la trayectoria caótica. Para entender esta propiedad, es esencial definir

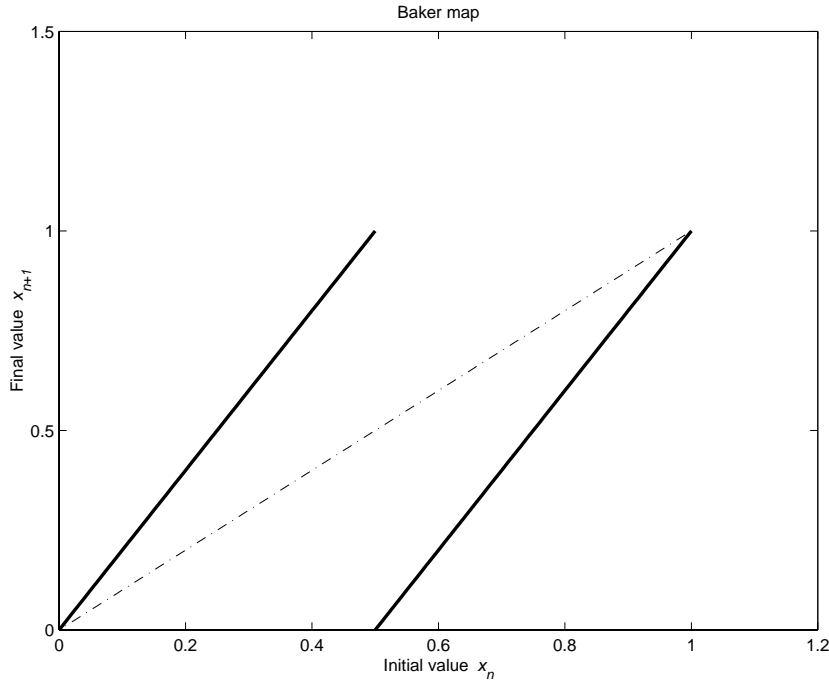


Figura 3.1. El mapa de Baker está definido como una función lineal a tramos tal y como la mostrada en esta imagen. La línea discontinua indica la función identidad.

cómo la información simbólica es codificada por este mapa. Para simplificar, sin pérdida de generalidad, consideramos que la información simbólica deseada es emitida en forma digital binaria. Aunque esta suposición pudiera considerarse demasiado restrictiva, puede ser demostrado que el método que proponemos es fácilmente generalizable a cualquier espacio simbólico finito.

Para codificar la información binaria, definimos una partición de generación en el espacio de fases $J = [0, 1]$. Esta partición de generación ω está compuesta de dos subparticiones, $\omega_1 = [0, 0.5]$ y $\omega_2 =]0.5, 1]$. Todos los puntos de la trayectoria caótica pertenecientes a la partición ω_1 codifican el símbolo binario $R_0 = 0$, de la misma manera, cualquier punto en ω_2 codifica el símbolo $R_1 = 1$. Puede ser demostrado que la probabilidad de que la órbita se encuentre en la partición ω_k es $p(\omega_k) = 0.5$. De la misma manera, también puede demostrarse que, si escogemos una condición inicial particular y dejamos al mapa evolucionar sin perturbaciones, su dinámica natural produce un mensaje simbólico $M = b_1, b_2, \dots$, donde los símbolos binarios R_0 y R_1 aparecen en la secuencia con la misma probabilidad $p_0 = p_1 = 0.5$.

Utilizando esta definición como base para la codificación en el mapa de Baker, se puede demostrar que la trayectoria caótica puede codificar cualquier secuencia de símbolos. Para explicar esta característica, es interesante recuperar el concepto del *estado simbólico* de un sistema caótico [35]. Considerando una condición inicial particular del mapa de Baker, llamamos b_i al bit generado en la iteración $i^{\text{ésima}}$

del mapa. Así, podemos definir un número real r que especifica completamente la secuencia simbólica como

$$r = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i} \quad (3.4)$$

Puede demostrarse que $r \in [0, 1]$ y que hay una correspondencia biunívoca entre

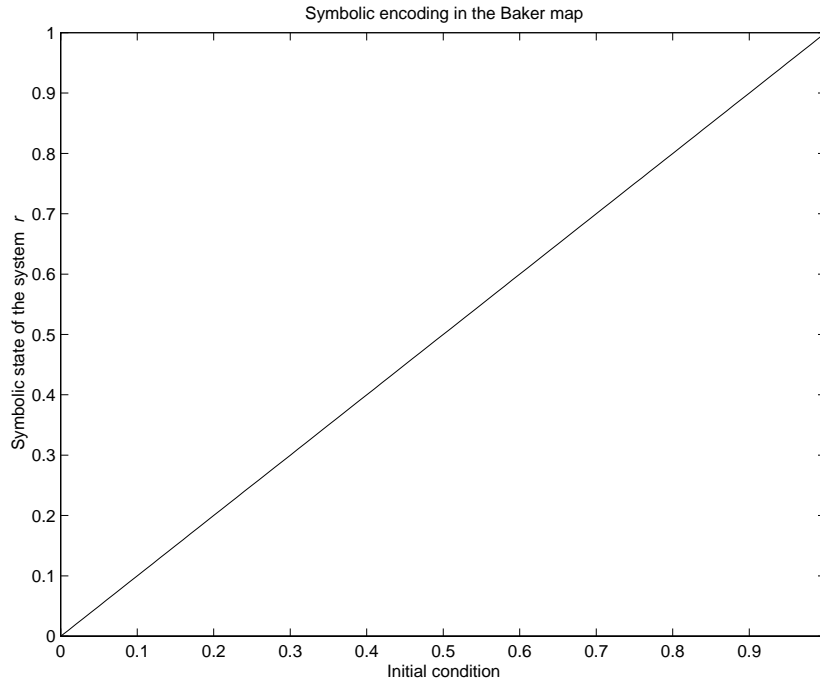


Figura 3.2. La imagen representa el estado simbólico del sistema r como función de la condición inicial en el mapa de Baker. Como puede verse, la relación entre ambas variables queda establecida de manera muy simple a través de la función identidad.

cualquier secuencia simbólica y su valor de r asociado. Así, podemos definir una nueva función $r(x_i)$ que asigne una secuencia simbólica r a cualquier condición inicial x_i del mapa. Por esta razón, $r(x_i)$ se denomina el estado simbólico asociado al estado x_i . Para entender por qué el mapa de Baker es una aplicación de Bernoulli, debemos observar la función $r(x_i)$. Como se muestra en la Fig. 3.2, la función $r(x_i)$ del mapa de Baker es simplemente la identidad $r(x_i) = x_i$. Esto significa que para cualquier valor posible del estado simbólico r , existe una única condición inicial $x_i = r$, que genera la secuencia simbólica dada por r . Por tanto, para codificar una secuencia simbólica específica (un mensaje) con el mapa, debemos encontrar una condición inicial que produzca esta secuencia particular. Consiguientemente, necesitamos una función $x(r)$, que exprese la condición inicial x_i en términos del estado simbólico deseado r . Por lo general esta función se denomina la *función de codificación de la forma de onda simbólica* y es, evidentemente, la inversa de la función $r(x_i)$ presentada previamente.

Gracias a esta discusión, podemos entender los dos motivos por los que hemos escogido al mapa de Baker como nuestro elemento de codificación caótico. Primero, porque es una aplicación de Bernoulli y puede generar cualquier secuencia simbólica que podamos desear, segundo, porque la función de codificación de la forma de onda simbólica es la más simple que podemos encontrar: la identidad. No todos los mapas discretos tienen una función de codificación de la forma de onda simbólica tan simple, como se muestra en la Fig. 3.3. Aunque la aplicación Logística sea también una aplicación de Bernoulli, tiene una función $x(r)$ bastante el compleja, lo que representa una dificultad al tratar de aplicarlo a un esquema de comunicaciones.

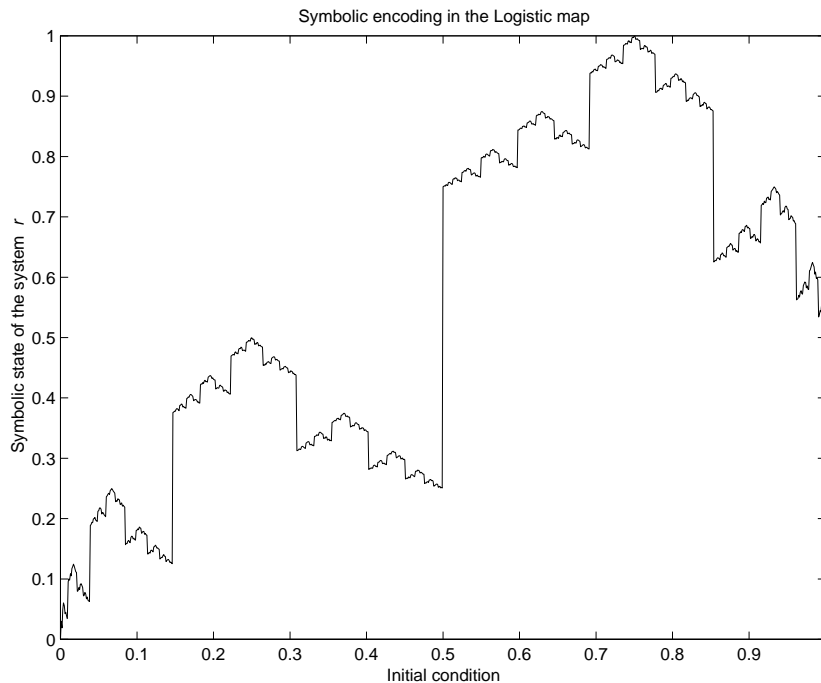


Figura 3.3. *La aplicación Logística es una aplicación de Bernoulli porque podemos encontrar una condición inicial x_i para cualquier estado simbólico posible r , sin embargo, la función de codificación de la forma de onda simbólica, $x(r)$, es más compleja, lo que hace que sea más difícil usar el mapa Logístico para codificar información.*

Desde un punto de vista práctico, no es posible trabajar con secuencias infinitas de símbolos, por tanto, es mejor definir una versión discreta de la función $r(x_i)$ que trunque la longitud de la secuencia de bits de la manera siguiente

$$r = \sum_{i=1}^N b_i 2^{-i}, \quad (3.5)$$

donde N es la longitud deseada de la secuencia. En este caso, $x(r)$ es discreta porque r sólo puede tomar 2^N valores diferentes (uno para cada secuencia de bits

posible). Por tanto, como los mensajes tienen N símbolos, es necesario introducir pequeñas perturbaciones en la trayectoria para conducirlo hacia la secuencia de símbolo que deseamos generar. Podemos modelar estas pequeñas perturbaciones como una variable aleatoria η , que puede ser considerada, en primera aproximación, como un ruido Gaussiano con varianza η_0 y media nula. En esta situación, podemos definir una nueva versión perturbada del mapa de Baker B_η

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n + \eta & \text{si } x_n \leq 0.5 \\ 2x_n - 1 + \eta & \text{si } x_n > 0.5. \end{cases} \quad (3.6)$$

Para fijar las ideas sobre el proceso de codificación, es interesante introducir un ejemplo simple. Tomemos el mensaje binario $X = 101110011001\dots$ y supongamos que estamos interesados en la utilización de un método de codificación truncado en $N = 8$ (8 bits son codificados sobre cada valor de x), en esta situación $x_1 = x(r_1) = r_1$. Sabemos que r_1 puede ser calculada usando la Ec.(3.5) para los $N = 8$ primeros bits de X ($b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8 = 10111001$). Entonces, $x_1 = r_1 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-8} = 0.72265625$. De la misma manera, x_2 puede ser evaluado tomando los 8 siguientes bits, desplazando X una posición a la izquierda ($b_2b_3b_4b_5b_6b_7b_8b_9 = 01110011$). Entonces, usando otra vez la Ec.(3.5) $x_2 = r_2 = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-7} + 2^{-8} = 0.44921875$. Equivalentemente $x_3 = r_3 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-7} = 0.8984375$, etc. Obsérvese que gracias a este método de codificación, la serie x_i está muy cerca de la trayectoria natural del mapa de Baker, sólo una pequeña perturbación debe ser añadida en algunas iteraciones para conducir el mapa a los valores deseados de x . En el ejemplo precedente, las perturbaciones necesarias vendrán dadas por $B(x_1) = 0.4453125 = x_2 - 0.00390625$, $B(x_2) = 0.8984375 = x_3$, etc.

3.2.2 Un modelo de comunicación caótica

Basándonos en este mecanismo de codificación, proponemos un modelo de comunicación que es el representado esquemáticamente sobre la Fig. 3.4. En este modelo, cualquier mensaje binario $X = b_1, b_2\dots$ es codificado sobre una forma de onda caótica $x = x_1, x_2\dots$, donde $x_i = x(r_i)$, siendo r_i el estado simbólico definido en la Ec.(3.5) y $x(r)$ la función de codificación de la forma de onda simbólica. Usando este mecanismo, $x_{i+1} = B_\eta(x_i)$ siendo B_η el mapa de Baker definido en la Ec.(3.6). En esta situación, la señal x es enviada sobre un canal de comunicación de ancho de banda W . Por el teorema de Nyquist sabemos que $W = \frac{f_s}{2}$, donde f_s es la frecuencia de muestreo. Esto indica que f_s es la tasa de transmisión máxima aceptable para la secuencia x (el intervalo entre dos transmisiones sucesivas de x_i debe ser al menos igual a $\frac{1}{f_s}$). Como en todos los canales de comunicación realistas, asumimos que existe una perturbación sobre la señal transmitida. Modelamos esta perturbación como un Ruido Aditivo Blanco Gaussiano (AWGN), ξ , de varianza σ^2 y media nula. En esta situación, el receptor, después de un proceso de muestreo, recibe una trayectoria perturbada, $y = y_1, y_2\dots$, donde $y_i = x_i + \xi$ para todo i . Este receptor

debe procesar la señal recibida para recuperar la información simbólica en forma de un nuevo mensaje $Y = \hat{b}_1, \hat{b}_2 \dots$

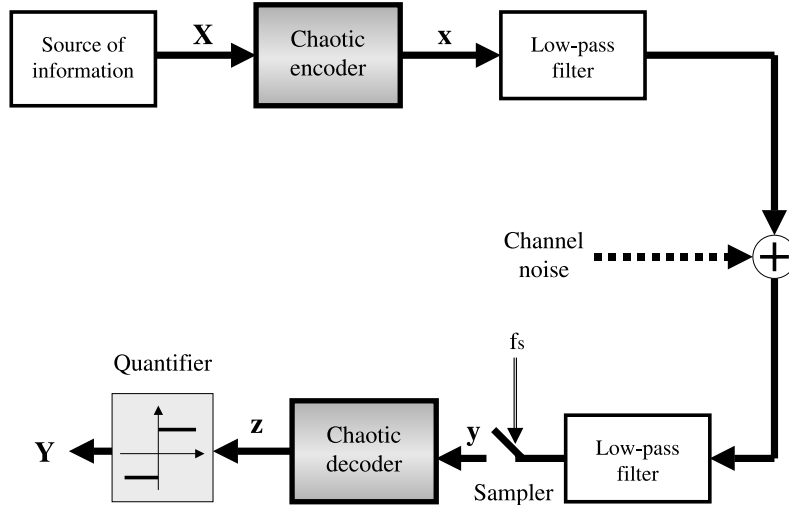


Figura 3.4. *Modelo básico de un sistema de comunicación caótico.*

Para medir la cantidad de información transferida usando este modelo de comunicación caótico, debemos recurrir a los conceptos de entropía H y de capacidad del canal C_s definidos por Shannon (consultar el Apéndice A). En rigor, la capacidad C_s de un canal de comunicación con ruido y limitado en banda es la tasa de transmisión máxima posible para ese canal, y viene dada por el límite de Shannon [4]

$$C_s = W \log \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right), \quad (3.7)$$

donde \log es el logaritmo en base 2, W es el ancho de banda del canal, P es la potencia de la señal emitida y σ^2 es la potencia del Ruido Aditivo Blanco Gaussiano en el canal. Observe que, cuando W viene representado en *Hertzios*, C_s se expresará en *bits/s*. Otro modo diferente de escribir la Ec.(3.7) se basa en el hecho de que $W = \frac{f_s}{2}$; entonces, como f_s es la frecuencia de muestreo, C_s puede ser expresado en bits por muestra de la manera siguiente

$$C_s = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \right). \quad (3.8)$$

El límite de Shannon representa la cota superior para la tasa de transmisión del canal. Todos los sistemas de telecomunicación tienen el objetivo de acercarse todo lo posible a este límite. En esta dirección, uno de nuestros objetivos en este capítulo

es el de mostrar cómo es posible acercarse más a este límite usando la redundancia intrínseca que está presente en las señales caóticas.

Considerando que usamos un alfabeto binario compuesto por sólo dos símbolos, la entropía de la fuente de información puede ser evaluada como la entropía del mensaje X emitido

$$H(X) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1, \quad (3.9)$$

donde p_0 y p_1 son las probabilidades de los 0 lógicos y los 1 lógicos respectivamente. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $p_0 = p_1 = 0.5$, de modo que $H(X) = 1 \text{ bit/simbolo}$. Es interesante comentar que la entropía contenida en la secuencia x , $H(x)$ debe ser la misma que la entropía del mensaje $H(X)$, porque hay una correspondencia entre la secuencia del mensaje X y las trayectorias perturbadas dadas por x . Por tanto, podemos decir que la entropía de la fuente es $H(x) = H(X) = 1 \text{ bit/simbolo}$, siendo $H(x)$ la entropía proporcionada por cada nueva muestra x_i añadida a la trayectoria, tal y como la definió Shannon (consultar el Apéndice A). De todos modos, para evaluar la capacidad de nuestro modelo de comunicación, nuestro interés no está concentrado en las trayectorias emitidas y recibidas x e y , sino en los mensajes binarios emitidos y recibidos X e Y , donde la información es realmente transportada. En este contexto, la capacidad eficaz C de este canal es

$$C = H(X) - H_Y(X), \quad (3.10)$$

donde $H_Y(X)$ es la entropía condicionada de X dada Y . Para evaluar esta capacidad, es esencial observar que para cada bit emitido b_i de X , existe un bit recibido \hat{b}_i de Y . Considerando este esquema, la probabilidad de error de bit es simplemente la probabilidad de que b_i y \hat{b}_i sean diferentes: $p_{err} = p(b_i \neq \hat{b}_i)$. Como esta probabilidad no depende del valor particular de b_i y $p_0 = p_1 = 0.5$, este canal, se puede considerar como binario simétrico y sin memoria. Así, C puede ser expresada como (consultar el Apéndice B)

$$C = 1 + p_{err} \log p_{err} + (1 - p_{err}) \log (1 - p_{err}). \quad (3.11)$$

En el contexto de la teoría de la información, esta capacidad eficaz C a veces es conocida como la información mutua I entre los mensajes recibidos y los mensajes emitidos. Considerando nuestro esquema de codificación, la información mutua depende exclusivamente de la intensidad σ^2 de ruido y del proceso de decodificación en el receptor, que permite recuperar la secuencia Y de la trayectoria ruidosa recibida y .

3.2.3 Método de decodificación simple

Existen múltiples mecanismos para recuperar el mensaje binario Y a partir de la trayectoria ruidosa y . Dependiendo del tipo de algoritmo de decodificación que utilizemos, podemos conseguir resultados muy diferentes en términos de calidad del sistema. El modo más fácil y natural de decodificar la información es simplemente

observando los valores aislados de cada muestra y_i . Decidimos que el símbolo recibido \hat{b}_i es un 0 lógico cuando $y_i \leq 0.5$ y que $\hat{b}_i = 1$ cuando $y_i > 0.5$. Este algoritmo simple está basado en el hecho de que, usando nuestro algoritmo de codificación, $x_i \leq 0.5$ cuando $b_i = 0$ y $x_i > 0.5$ cuando $b_i = 1$. Esto puede ser entendido observando que el estado simbólico r_i depende de $b_i 2^{-1}$ y del resto de los bits siguientes con exponentes inferiores a -1 (Ec.(3.5)). Entonces, podemos esperar que todos los valores de y por encima del umbral 0.5 indiquen un 1 y los valores por debajo indiquen un 0. Para calcular la capacidad del sistema con este mecanismo de recepción es necesario evaluar el valor de la probabilidad de error de bit p_{err} como una función de la intensidad de ruido. Para hacer esto, es esencial introducir un concepto extensamente usado en comunicaciones: la relación señal a ruido (Signal to Noise Ratio - SNR) (consultar el Apéndice B), que puede ser expresada como

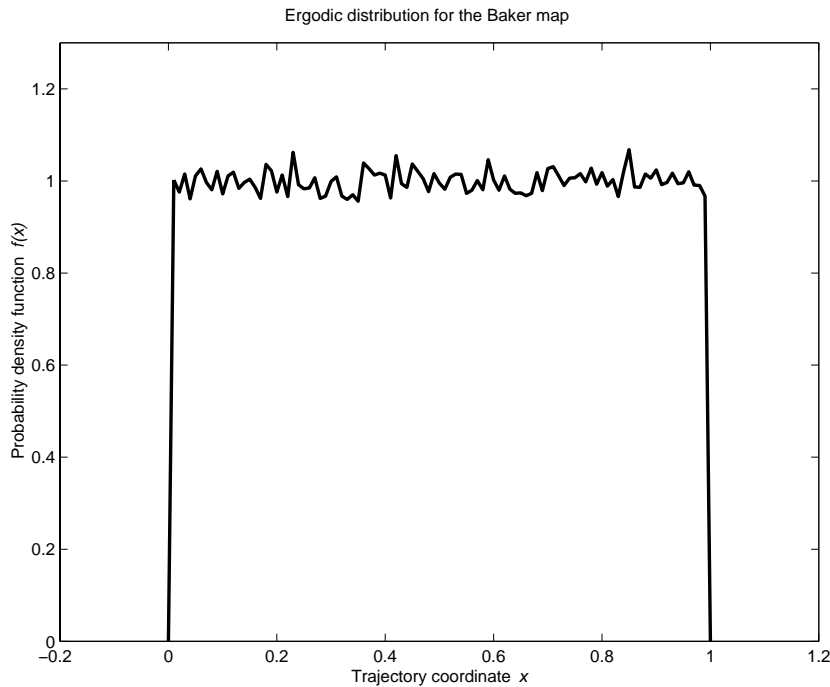


Figura 3.5. Esta imagen muestra la función de densidad de probabilidad para el mapa de Baker perturbado B_η considerando la perturbación como un ruido Gaussiano de media nula y varianza $\sigma_0^2 = 10^{-6}$. Como puede observarse, sigue una distribución uniforme limitada por $a = 0$ y $b = 1$. Las simulaciones han sido realizadas sobre una secuencia de 10^6 muestras.

$$SNR = \frac{P}{\sigma^2}, \quad (3.12)$$

La potencia P de la señal puede ser evaluada si la tratamos como una variable aleatoria. Como muestra la Fig. 3.5, el mapa de Baker B_η tiene una función de densidad de probabilidad $f(x)$ bastante uniforme. Es conocido que la potencia de

una variable aleatoria de media nula puede ser evaluada como su varianza σ_x^2 . La x que utilizamos como señal transmitida no tiene media nula. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril sería más lógico utilizar $x - \bar{x}$ como señal transmitida, porque la componente continua \bar{x} no transporta ninguna información. Por este motivo, la potencia eficaz de nuestra señal x puede ser considerada como su varianza. Dado que esta es una variable uniforme, $\sigma_x^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$, siendo a la posición de la cota inferior de la función de densidad de probabilidad y b la de la superior. En este caso $a = 0$ y $b = 1$, por tanto concluimos que

$$P = \sigma_x^2 = \frac{1}{12}. \quad (3.13)$$

Como asumimos que la señal recibida está normalizada, este resultado permite evaluar la SNR en todas las simulaciones que hemos realizado. Normalmente, p_{err}

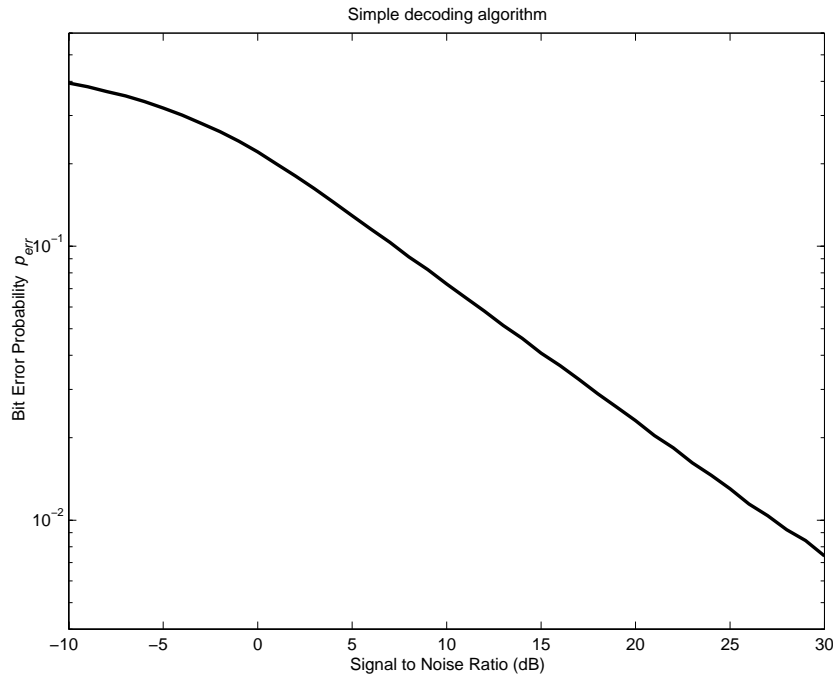


Figura 3.6. Probabilidad de error de bit p_{err} como función de SNR_{dB} . Las simulaciones han sido realizadas sobre una secuencia de 10^6 bits usando el algoritmo de decodificación simple.

es representada como una función de la SNR_{dB} como medida de la calidad de un sistema de comunicación digital. Representamos esta curva en la Fig. 3.6 para el mecanismo de decodificación simple propuesto previamente. Gracias a este resultado, podemos evaluar la capacidad del modelo de comunicación de la Ec.(3.11). Esta capacidad se muestra en la Fig. 3.7 como una función de SNR_{dB} . Es interesante observar que C tiende a cero para valores bajos de SNR , mientras que tiende a 1 cuando SNR tiende a infinito. Esto es debido a la definición de C dada en

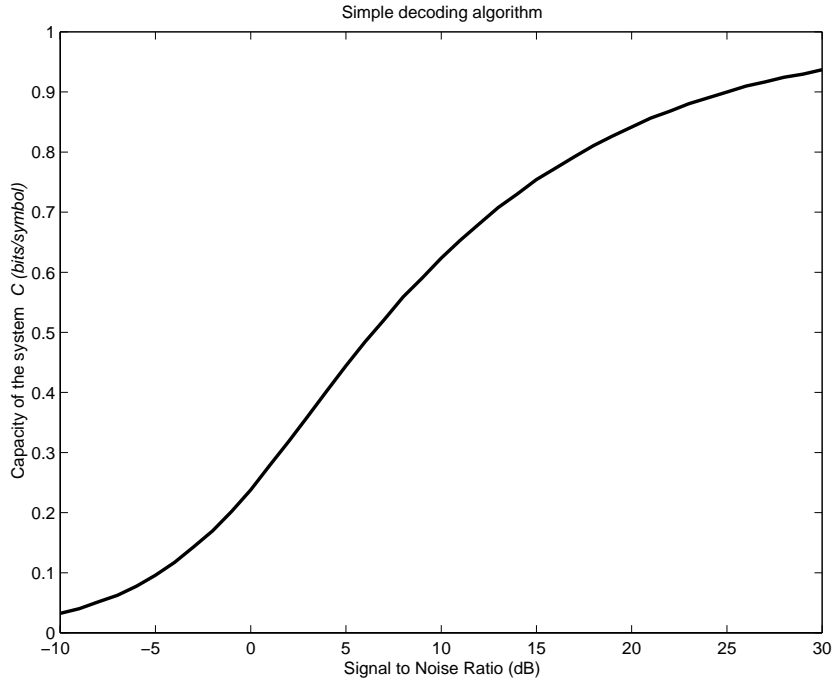


Figura 3.7. Capacidad eficaz C como una función de SNR_{dB} . Las simulaciones han sido realizadas sobre una secuencia de 10^6 bits usando el algoritmo de decodificación simple.

la Ec.(3.10), cuando SNR es baja, la intensidad de ruido σ^2 es alta y la entropía $H_Y(X)$ se acerca al valor de $H(X)$ haciendo que C se aproxime a cero. Por otra parte, cuando $SNR \rightarrow \infty$, $H_Y(X) \rightarrow 0$, y $C \rightarrow 1 \text{ bit/símbolo}$, este comportamiento general permanece para todo mecanismo de decodificación posible.

3.2.4 Método de decodificación caótico de paso atrás

Es importante comentar que el mecanismo de decodificación simple presentado antes ofrece una calidad de comunicación baja. Incluso para valores elevados de la SNR la calidad de comunicación está bastante degradada. Esto puede ser mejorado aprovechando que la señal x emitida está muy cerca de la trayectoria caótica del mapa de Baker. Es conocido que dos trayectorias caóticas vecinas distantes ϵ la una de la otra, cuando son iteradas en el tiempo n veces, divergen de manera proporcional a la exponencial $\epsilon e^{\lambda n}$, siendo λ el exponente de Lyapunov del mapa de Baker. Por tanto, aplicando iteraciones hacia atrás, dos trayectorias vecinas distantes δ la una de la otra, convergen de forma proporcional a la exponencial $\epsilon e^{-\lambda n}$. Consiguientemente, si iteramos hacia atrás los puntos de la trayectoria ruidosa y , podemos obtener una trayectoria filtrada z con puntos más cercanos a la trayectoria original x . Lamentablemente, este proceso no es tan inmediato, porque el mapa de Baker no es invertible y cada iteración hacia atrás tiene dos soluciones diferentes. Por lo tanto,

Algoritmo hacia atrás con $b = 1$

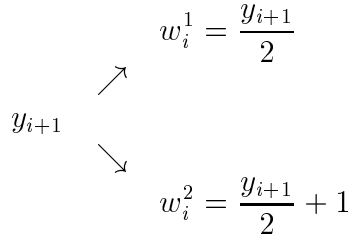


Figura 3.8. *La iteración hacia atrás de un punto sólo ofrece dos soluciones, correspondientes a cada una de las partes lineales del mapa de Baker. Es necesario seleccionar la solución apropiada para reconstruir la trayectoria.*

para b iteraciones hacia atrás, 2^b trayectorias son posibles. Consiguientemente, la cuestión es identificar, entre todas estas trayectorias, aquella que esté más cerca de x . Dado que no conocemos x en recepción, un método natural es el de escoger la trayectoria hacia atrás que esté más cercana a la serie y recibida.

El mecanismo que seguiremos es el siguiente. Queremos obtener la secuencia filtrada z tras la aplicación de b iteraciones hacia atrás sobre y . Para $b = 1$, cada muestra recibida y_{i+1} genera dos soluciones, obtenidas invirtiendo la correspondiente sección lineal del mapa de Baker (tal y como muestra la Fig. 3.8). Con esta información, podemos calcular la distancia entre ambas soluciones y el punto ruidoso y_i . Entonces, el valor filtrado z_i es asignado a la solución w_i^j más cercana a y_i . Para dos iteraciones hacia atrás, $b = 2$, el punto ruidoso y_{i+2} genera cuatro trayectorias diferentes (observe la Fig. 3.9). Calculamos la distancia entre estas cuatro trayectorias, w_i^j, w_{i+1}^k ($j \in \{1, 2, 3, 4\}, k \in \{1, 2\}$), y los puntos con ruido y_i, y_{i+1} respectivamente. El valor de z_i , en este caso es evaluado como la iteración w_i^j que pertenezca a la trayectoria que reduzca al mínimo esta distancia. En el caso general de b iteraciones hacia atrás, el punto y_{i+b} genera 2^b soluciones. En esta situación, z_i toma el valor de w_i^j ($j \in \{1 \dots 2^b\}$) que pertenezca a la trayectoria que reduzca al mínimo su distancia con las muestras ruidosas y_i, \dots, y_{i+b-1} .

La trayectoria filtrada z presenta un ruido eficaz que se encuentra bajo el verdadero ruido del canal. Esto significa que, como puede ser observado en la Fig. 3.10, la distancia media entre la trayectoria caótica x y la trayectoria filtrada z , definida como $\sigma_e^2 = \frac{1}{l-1} \sum_{i=1}^l (x_i - z_i)^2$, está siempre bajo el ruido real del canal σ^2 . A medida que el número de iteraciones b aumenta, el ruido efectivo disminuye con respecto al ruido del canal. Sin embargo, esta disminución no es tan grande como cabría esperar a través del exponente de Lyapunov $\epsilon e^{-\lambda n}$. Esto es debido a la carencia de información que tenemos sobre cual es la verdadera trayectoria hacia atrás asociada a la serie y . El problema, que se produce con una cierta probabilidad, es la introducción de errores en la predicción, lo que se traduce en unas trayectorias incorrectas que amplifican el ruido eficaz. Los efectos de este fenómeno pueden ser observados en

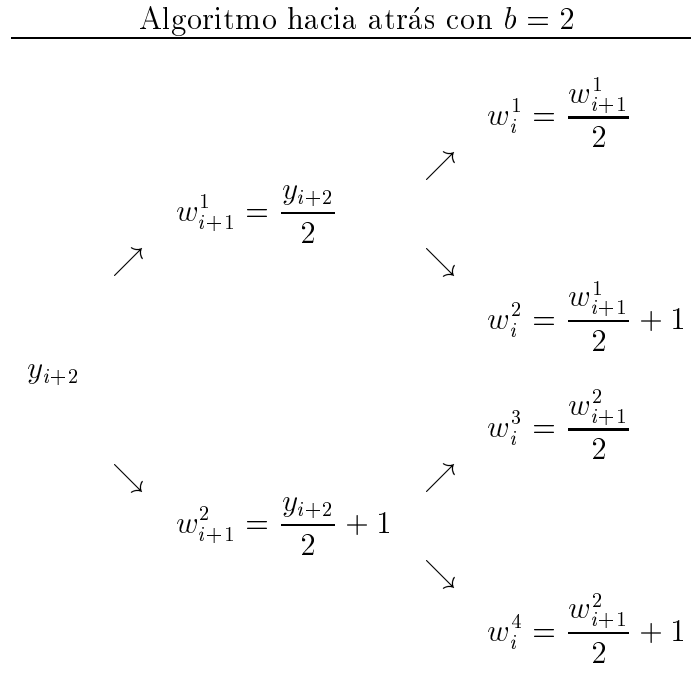


Figura 3.9. *Dos iteraciones hacia atrás de una muestra recibida, generan cuatro posibles soluciones. El punto filtrado z_i es estimado comparando cada una de las soluciones con la secuencia y_i recibida.*

la Fig. 3.11, donde se representa una muestra de la señal emitida x y de su correspondiente secuencia filtrada z . El método de decodificación dinámico está basado en la utilización de la trayectoria filtrada z para determinar el mensaje Y recibido, en vez de usar la trayectoria ruidosa y . Por tanto, diremos que el bit recibido \hat{b}_i es un 0 lógico cuando $z_i \leq 0.5$ y que $\hat{b}_i = 1$ cuando $z_i > 0.5$. Aunque esta técnica no elimina completamente la presencia de errores, mejora considerablemente la calidad de las comunicaciones. Como se muestra en la Fig. 3.12, la probabilidad de error de bit p_{err} disminuye considerablemente cuando el proceso de filtrado dinámico es aplicado.

Esta mejora de funcionamiento se aprecia más claramente estudiando su efecto sobre la capacidad C del sistema. Como se representa en la Fig. 3.13, cuando el algoritmo de filtrado dinámico es aplicado, C aumenta con el número de iteraciones hacia atrás b . Como puede apreciarse, esta técnica proporciona el efecto deseado de aproximarse al límite de Shannon C_s para valores intermedios del parámetro SNR .

3.2.5 Método caótico predictivo

Frente a las variables aleatorias, cuyas muestras forman ondas independientes, las caóticas son fuertemente dependientes. A causa de esto, una sola muestra contiene información sobre toda la trayectoria. Esta propiedad ya ha sido propuesta en la

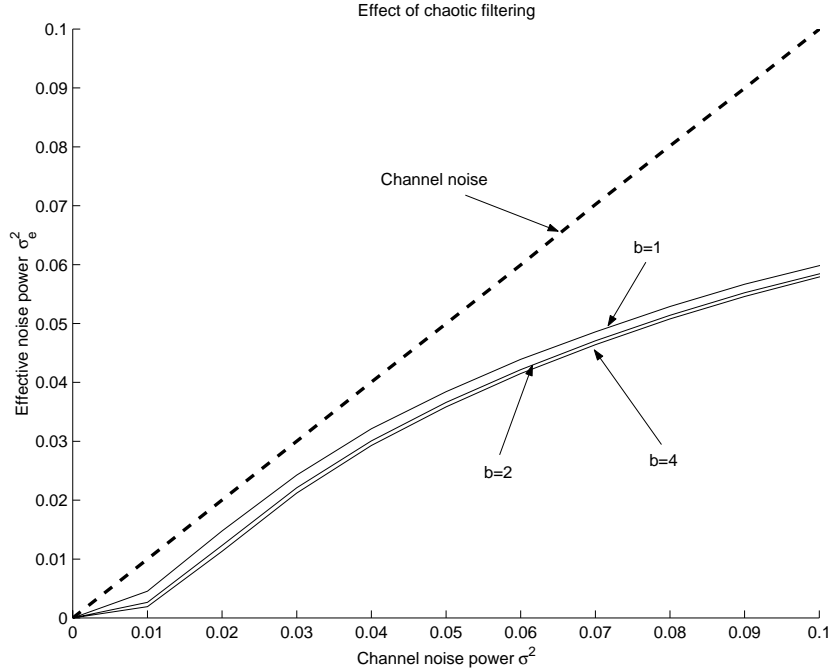


Figura 3.10. El efecto del filtrado dinámico caótico debe ser el de disminuir la cantidad de ruido sobre la trayectoria. Por esta razón, el ruido eficaz σ_e^2 de la trayectoria filtrada z está siempre bajo el ruido real de canal σ^2 que transporta la señal y . Las simulaciones han sido realizadas sobre una secuencia de 10^6 muestras.

literatura [36] como un mecanismo natural para minimizar problemas de desvanecimiento en la transmisión, permitiendo la recuperación de la información omitida gracias a partes pasadas o futuras de la señal recibida. Lo que proponemos ahora es utilizar esta propiedad para establecer un proceso de comunicación que transmita sólo una fracción de la trayectoria caótica. Con este objetivo, eliminamos g puntos de cada $g + 1$ puntos de la secuencia dinámica. Por ejemplo, si $g = 1$, sólo transmitimos las muestras $x_1, x_3, x_5 \dots$. Para un hueco de longitud g , la señal transmitida toma la forma $x_i, x_{i+g+1}, x_{i+2(g+1)} \dots$. La trayectoria hacia atrás es calculada considerando los puntos recibidos $y_i, y_{i+g+1}, y_{i+2(g+1)} \dots$. A partir de estos puntos, calculamos una trayectoria filtrada $z_i, z_{i+g+1}, z_{i+2(g+1)} \dots$ aplicando $b = g + 1$ iteraciones hacia atrás sobre la señal recibida y . Después de esto, es posible reconstruir la trayectoria completa aplicando g iteraciones hacia delante sobre cada uno de los valores de z . Como puede observarse en la Fig. 3.14, para $g = 1$, una de cada 2 muestras es transmitida. En recepción, obtenemos una trayectoria filtrada z realizando dos iteraciones hacia atrás sobre la serie y . Después de esto, los huecos pueden ser eliminados prediciendo sus valores gracias una iteración hacia delante de B sobre cada una de las muestras de z .

Usando este esquema, en el que necesariamente $b = g + 1$, el número de muestras para cada reconstrucción es siempre dos (para z_i, y_i e y_{i+g+1}). Además, el valor

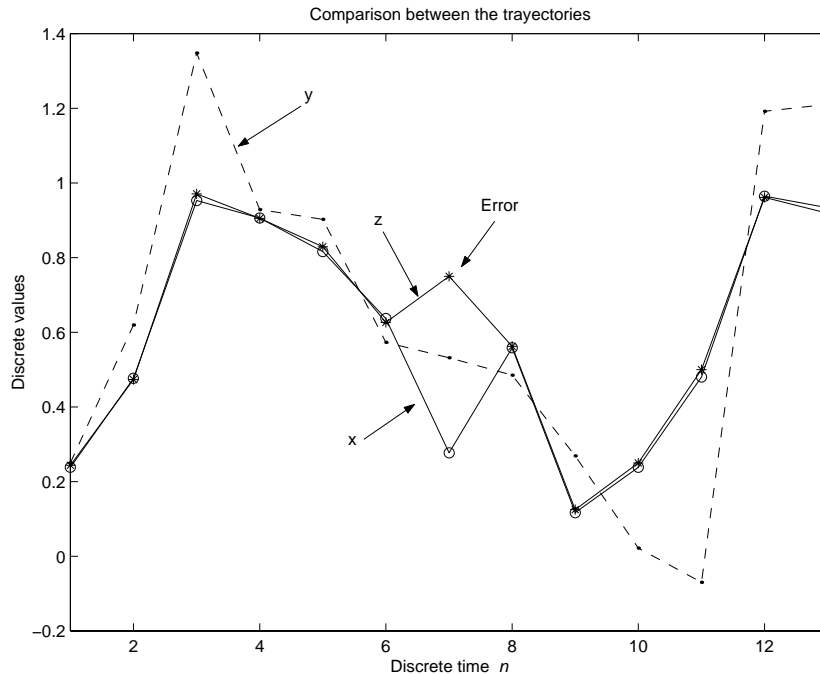


Figura 3.11. La imagen muestra una realización del método de decodificación propuesto sobre una trayectoria codificada con un esquema caótico. Como puede observarse, la trayectoria filtrada z (estrellas), está mucho más próxima a la trayectoria verdadera emitida x (círculos) que la trayectoria recibida ruidosa y (puntos) en todos los puntos en los cuales la trayectoria hacia atrás ha sido recuperada correctamente. Sin embargo, también puede haber errores, como el mostrado en el centro de la imagen, que añade una gran cantidad de ruido eficaz a la forma de onda filtrada.

de los huecos predichos depende exclusivamente de los puntos recuperados por el filtrado dinámico. A causa de esto, un único error sobre la trayectoria filtrada puede producir un burst de errores de longitud g al predecir erróneamente la forma de onda caótica original. Esto tiene un efecto negativo sobre la probabilidad de error de bit p_{err} , que se ve considerablemente deteriorada cuando el valor de g crece, tal y como se muestra en la Fig. 3.15.

Emplear un esquema de predicción degradada p_{err} , pero también permite mejorar la capacidad de comunicación, haciendo que el sistema se aproxime más al límite de Shannon para ciertos valores de la SNR . Esto es debido a que, aunque aumente la probabilidad de error, es necesario transmitir menos muestras para recibir la misma cantidad de bits. De hecho, es fácil demostrar que cada muestra emitida transporta exactamente $g + 1$ bits, sencillamente porque cada muestra permite recuperar su propio valor recibido más los siguientes g bits de su hueco asociado, tal y como explicamos antes. Por tanto, es normal que la capacidad eficaz C del canal ya no respete la Ec.(3.11) porque, en esta expresión, usamos una muestra para codificar

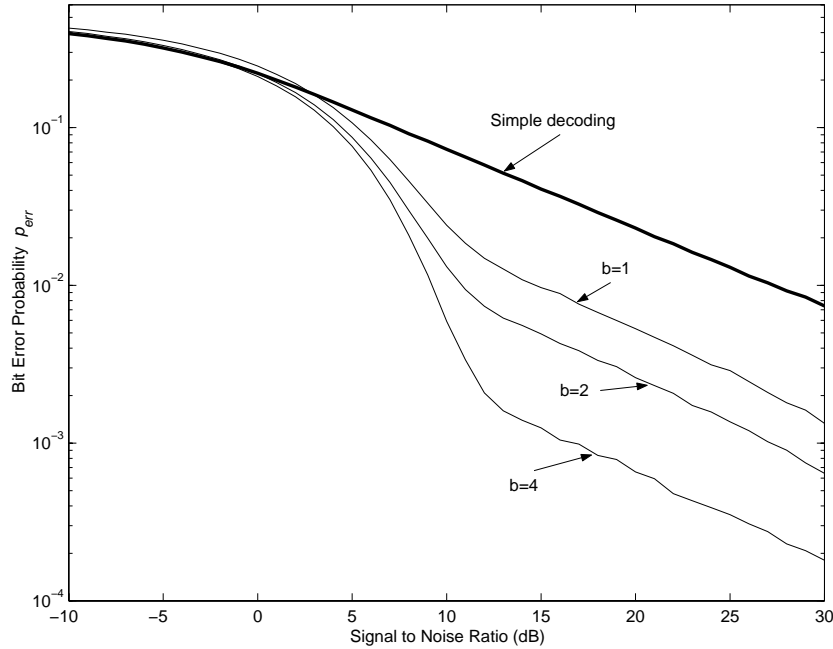


Figura 3.12. La probabilidad de error de bit p_{err} para la decodificación simple (línea sólida), y para filtrado dinámico caótico. Como puede observarse, cuando el número de iteraciones b aumenta, la calidad del sistema mejora. Esto es debido a que en una forma de onda caótica, cada punto tiene información sobre toda la trayectoria. Cuanto más elevado sea el número de muestras pasadas, mayor será el conocimiento que tengamos sobre cada símbolo transmitido. Las simulaciones han sido realizadas sobre una secuencia de 10^6 bits.

cada bit, mientras que con el esquema predictivo, enviamos una muestra por cada $g + 1$ bits. Puede ser demostrado que para un g dado, la nueva capacidad eficaz del canal, que podemos llamar C_g , es

$$C_g = C = (g + 1)C_0, \quad (3.14)$$

donde C_0 es la capacidad eficaz del canal binario sin memoria dado en la Ec.(3.11). En esta situación, como muestra la Fig. 3.16, la capacidad predictiva C_g aumenta con g , lo que significa que la eficiencia del sistema de comunicación mejora. Como puede observarse en esta figura, para algunos valores particulares de la SNR , C_g se aproxima al valor del límite de Shannon.

El hecho de que podamos aumentar la capacidad del sistema añadiendo huecos sobre la trayectoria es una conclusión muy interesante. Para entender en profundidad las consecuencias de esta propiedad, es importante añadir algunos comentarios. Primero, observar que, si la frecuencia de muestreo es f_s , entonces la capacidad máxima del sistema, expresada en $bits/s$, será

$$C = (g + 1)f_s, \quad (3.15)$$

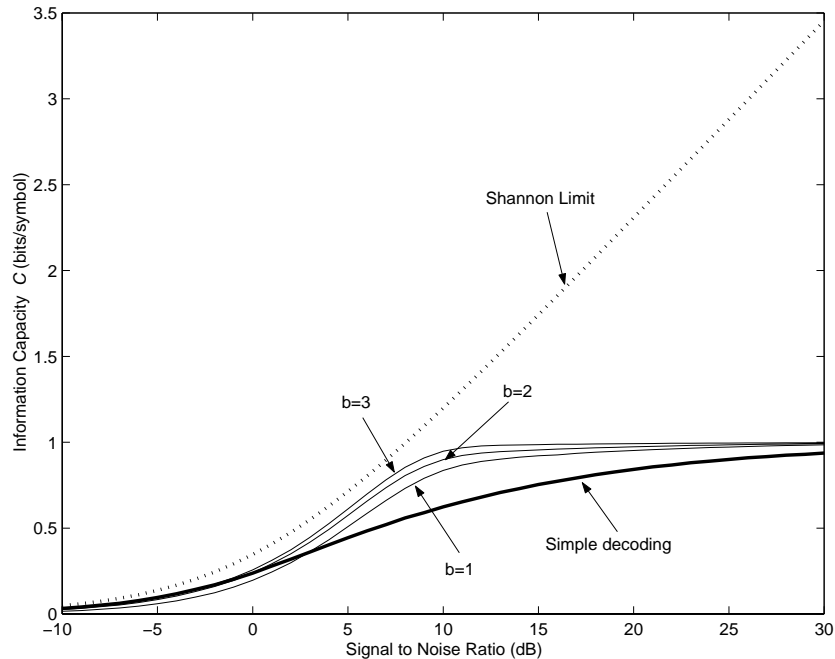


Figura 3.13. Capacidad del sistema de comunicación. La línea sólida corresponde al mecanismo de decodificación simple. La línea de puntos indica el límite de Shannon, que es la capacidad máxima para cualquier decodificación posible. Puede ser observado que el método de filtrado dinámico caótico permite al sistema acercarse al límite de Shannon para valores intermedios de la SNR. Las simulaciones han sido realizadas sobre una secuencia de 10^6 bits.

valor que es alcanzado cuando $SNR \rightarrow \infty$. En esta situación, dado que es posible tener g tan grande como queramos, debería ser posible también que el sistema alcance una capacidad infinita. Aunque esto no contradice el límite de Shannon C_s , es un escenario que no corresponde con la realidad. El valor de g no puede ser tan grande como deseamos porque está limitado por el tamaño de la perturbación de control η aplicada en el proceso de decodificación que usamos en el mapa de Baker modificado B_η . Esto obliga a que la longitud de los huecos esté acotada, porque una pequeña desviación añadida por la perturbación de control es amplificada en un factor de e^λ en cada iteración.

3.3 Codificación caótica continua

La primera parada en nuestro viaje por la comunicación caótica ha estado dedicada al tipo más simple de sistema que presenta esta propiedad: los mapas discretos. La evolución natural es la de considerar ahora a sus compañeros continuos: los sistemas caóticos basados en ecuaciones diferenciales no lineales. Los sistemas caóticos continuos son intrínsecamente más complejos que los mapas discretos. Mientras estos últimos pueden ser descritos a través de una expresión recurrente unidimensional,

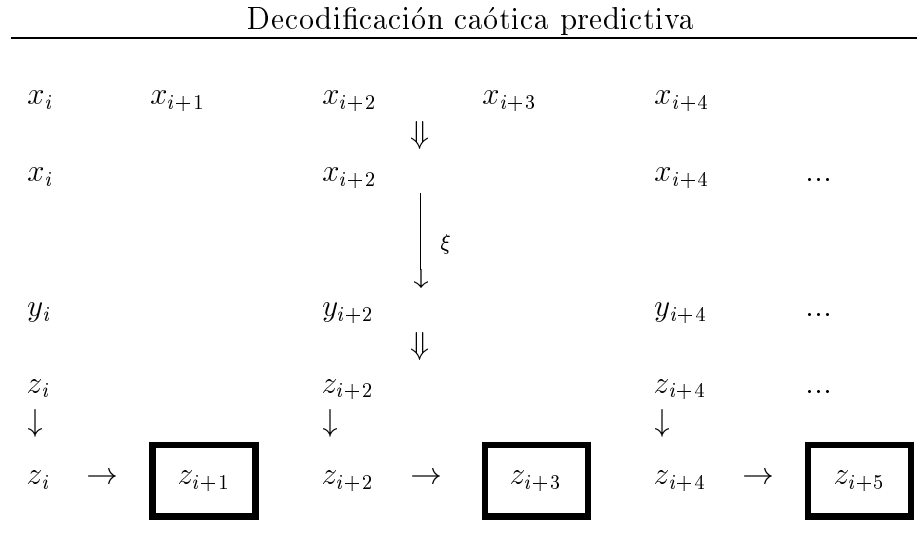


Figura 3.14. *Proceso de decodificación predictiva para $g = 1$. Como puede observarse, de cada $g + 1$ puntos de la onda caótica, g son retirados antes de la transmisión. En recepción, calculamos la trayectoria filtrada $z_i, z_{i+2}, z_{i+4}, \dots$, a partir de la secuencia recibida $y_i, y_{i+2}, y_{i+4}, \dots$. Después de esto, el resto de la trayectoria puede ser reconstruido aplicando iteraciones hacia delante sobre las muestras apropiadas.*

los primeros sólo puede existir en un espacio de estados de al menos tres dimensiones. Por tanto, el sistema continuo caótico más simple que podemos encontrar debe incluir, al menos, tres ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales e independientes.

Los trabajos más recientes en el ámbito de las comunicaciones caóticas están asociados a sistemas continuos, y han proporcionado una gran variedad de aplicaciones prácticas potenciales. Entre otras, la sincronización receptor - transmisor [28, 29], el enmascaramiento de señales y la recuperación [33],[37], el cifrado [38], la reconstrucción de información [36], algoritmos que permiten ajustar un mensaje arbitrario digital a la dinámica simbólica de un sistema caótico [30, 36, 39], etc. Algunas otras contribuciones muestran que es posible dirigir la evolución de una señal caótica aplicando pequeñas perturbaciones sobre las variables del sistema. Este rasgo permite generar formas de onda caóticas, cuya representación simbólica corresponde a un mensaje deseado. Esta aproximación basada en control ya ha proporcionado nuevas soluciones para algunos problemas clásicos en comunicaciones digitales, como el diseño de sistemas de transmisión robustos en presencia de ruido impulsivo [36].

En relación con estos trabajos, en esta sección abundaremos sobre la técnica de control descrita en [36] y haremos un primer esfuerzo para investigar sus posibles aplicaciones dentro del ámbito de la codificación de canal. La codificación de canal es un proceso que ocurre en todos los sistemas digitales de telecomunicación, y consiste en introducir deliberadamente redundancia en la señal transmitida, pero de un modo que permita al receptor detectar y, a veces, corregir errores causados

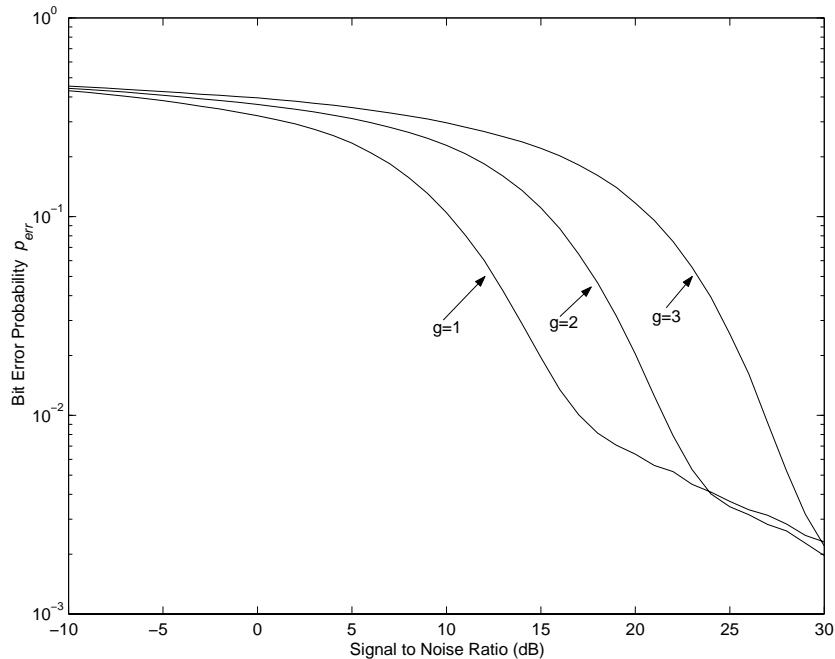


Figura 3.15. Probabilidad de error de bit p_{err} para un método caótico predictivo con longitudes de hueco g diferentes. Como puede observarse, p_{err} empeora cuando g crece. Esto es debido a que cada muestra es predicha usando cada vez menos información. Las simulaciones han sido realizadas para una secuencia de 10^6 bits.

por el ruido del canal o la distorsión. Aunque se le ha prestado relativamente poca atención a este tema desde el punto de vista de la dinámica caótica, una contribución notable es el trabajo de Baptista [40], donde se propone un esquema de comunicación completo, totalmente basado en teoría del caos, incluyendo la puesta en práctica de un codificador dinámico de canal. También es notable el esfuerzo de Chen y Wornell [41], donde se muestran resultados interesantes sobre el diseño de códigos de canal basados en sistemas caóticos de tiempo discreto, así como su conexión a métodos de codificación convencionales.

Con este trabajo, presentamos un acercamiento diferente. Explotamos la redundancia natural de una señal caótica en tiempo continuo introduciendo un mensaje deseado dentro de su dinámica simbólica. Con estas ideas, se propone un novedoso código de línea con capacidad de corrección de errores, cuyo funcionamiento es ilustrado a través de simulaciones computacionales. Finalmente, desarrollamos una técnica que permite la puesta en práctica de ese código sobre cualquier sistema de comunicación convencional digital como Internet o la red GSM.

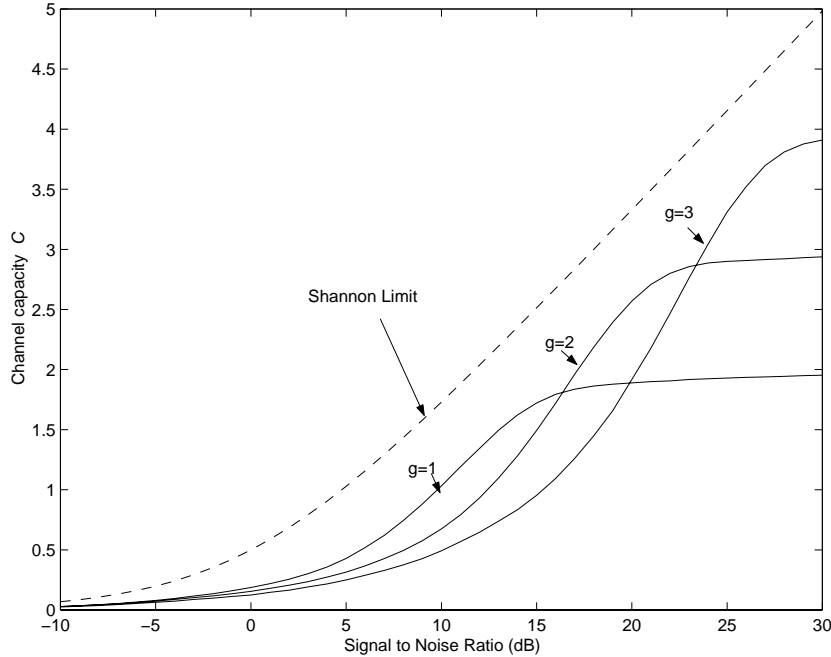


Figura 3.16. Capacidad del mecanismo de decodificación caótico predictivo para valores diferentes de g . Como puede observarse, para baja SNR y alto g los valores, la capacidad de canal C mejoran en su acercamiento a al límite de Shannon. En el límite $SNR \rightarrow \infty$, C_0 va a 1, $C_1 \rightarrow 2$, $C_2 \rightarrow 3$ y para $g = 3$, $C_3 \rightarrow 4$ tal y como indica la Ec.(3.14). Las simulaciones han sido realizadas para una secuencia de 10^6 bits.

3.3.1 Controlando el oscilador de Lorenz

Es conocido [36] que pequeñas perturbaciones aplicadas sobre la trayectoria de un attractor caótico continuo pueden ser usadas para hacer que la forma de onda de salida transporte una secuencia simbólica deseada que represente un mensaje. El sistema de Lorenz,

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y) \\ \dot{y} = Rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (3.16)$$

proporciona un marco apropiado para investigar la idea de controlar la dinámica de un attractor caótico con pequeñas perturbaciones. Es importante recordar que, para los valores estándar de los parámetros: $\sigma = 10$, $R = 28$, y $b = \frac{8}{3}$, la coordenada de estado $(x(t), y(t), z(t))$ evoluciona siguiendo un attractor caótico de dos lóbulos contenido en un espacio de fases tridimensional. Este conjunto estándar de parámetros lo vamos a usar para todas las discusiones y simulaciones sobre este sistema en esta sección.

Para establecer una conexión entre la dinámica del attractor de Lorenz y el marco de los sistemas de telecomunicación, es necesario introducir una representación

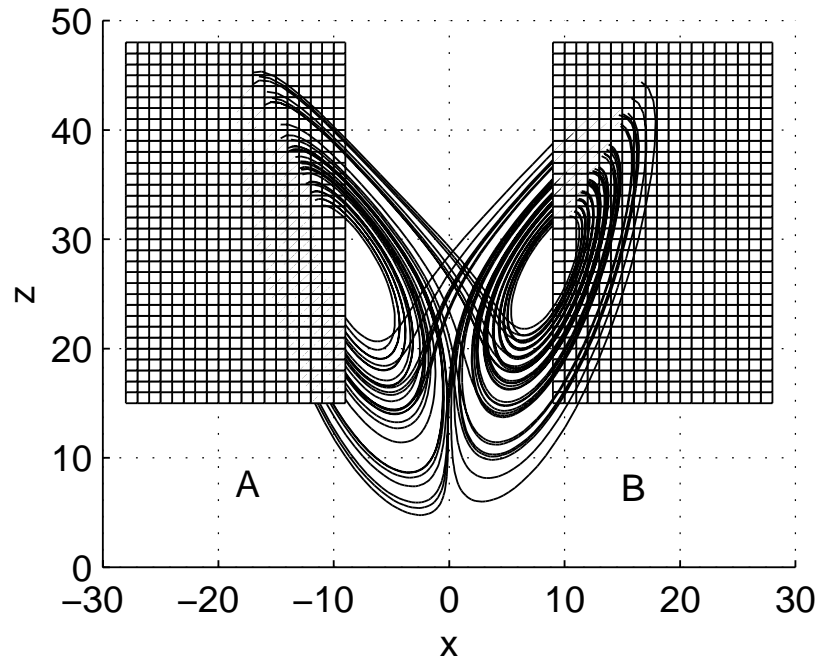


Figura 3.17. Esta figura muestra la proyección en el plano cartesiano $x - z$ del atractor caótico de Lorenz bajo parámetros estándar ($\sigma = 10$, $R = 28$ y $b = \frac{8}{3}$). Las superficies representadas corresponden a dos secciones de Poincaré definidas por $y = +\sqrt{b(R-1)}$ y $x \geq +\sqrt{b(R-1)}$, para el semiplano de la derecha, y por $y = -\sqrt{b(R-1)}$ y $x \leq -\sqrt{b(R-1)}$ para el de la izquierda. Estas superficies representan respectivamente los símbolos A y B .

simbólica de la información que esté asociada al atractor. Para hacerlo, vamos a proceder de un modo similar al seguido en [35]. Definimos un par de superficies de Poincaré que cortan al atractor dadas por los dos semiplanos definidos por las condiciones siguientes

$$\begin{cases} P_1 : y = +\sqrt{b(R-1)} & y \ x \geq +\sqrt{b(R-1)} \\ P_2 : y = -\sqrt{b(R-1)} & y \ x \leq -\sqrt{b(R-1)}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Obsérvese que, como está representado en la Fig. 3.17, cada una de las secciones definidas está localizada sobre un lóbulo diferente del atractor. En esta situación, cuando la coordenada de estado cruza la superficie $y = -\sqrt{b(R-1)}$, decimos que un símbolo A ha sido generado. Por otra parte, cuando se atraviesa la sección $y = +\sqrt{b(R-1)}$, se dice un símbolo B ha sido generado. Así, podemos establecer una relación directa entre la evolución en el tiempo del sistema y la secuencia simbólica resultado de cruces sucesivos. La evolución de esta secuencia en el tiempo es lo que por lo general se denomina la *dinámica simbólica* del sistema. Es importante observar que, con este esquema, el espacio simbólico de este sistema es binario (porque hay sólo dos símbolos), por lo que puede ser adaptado de manera sencilla a

los requerimientos de las comunicaciones binarias digitales.

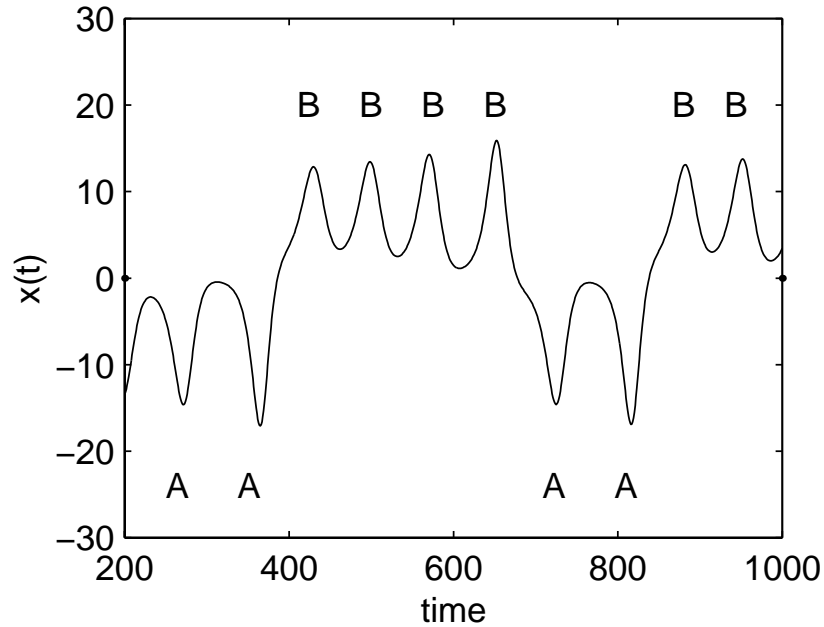


Figura 3.18. *La evolución temporal de la variable $x(t)$ es suficiente para determinar la secuencia simbólica generada por el atractor. Un máximo local de esta variable que se encuentre en valores $x(t) > 0$ corresponde necesariamente a un cruce con la sección de Poincaré P_1 y, por tanto, con la generación de un símbolo B . Por otra parte, un mínimo local $x(t) < 0$ siempre viene asociado con un cruce con la superficie P_2 y, consiguientemente, con la generación de un símbolo A .*

Considerando que el sistema es determinista, puede demostrarse que existe una correspondencia entre el punto en el que la coordenada estatal cruza cada una de las superficies y la secuencia de símbolos futura, s_1, s_2, \dots , generada a partir de este. Obsérvese que s_1 indica el cruce actual, mientras que s_n corresponde a la superficie que está siendo cruzada $n - 1$ oscilaciones más tarde. Es esencial entender que la secuencia simbólica representada por el atractor puede ser recuperada simplemente observando la señal $x(t)$. Un ejemplo ilustrativo puede ser observado en la Fig. 3.18, donde el atractor evoluciona libremente y los símbolos A y B aparecen de un modo arbitrario como una secuencia de picos positivos y negativos.

Hay muchas técnicas de control diferentes que permiten la codificación de información sobre la dinámica simbólica generada por los cruces con las superficies de Poincaré presentadas antes. Con este trabajo, escogemos la propuesta en [36], que tiene la ventaja de aplicar las perturbaciones sobre una sola variable de sistema, z , en vez de usar la coordenada estatal completa. Esto permite una puesta en práctica mucho más simple del esquema de control. Es importante comentar que, en este contexto, control significa la capacidad de dirigir el sistema de modo que genere una secuencia de símbolos deseada, en vez de una arbitraria. Esto es equivalente a la

posibilidad de codificar la información sobre la dinámica simbólica del sistema, dado que cualquier secuencia que represente cualquier mensaje posible es susceptible de ser insertada en la trayectoria caótica.

Antes de que podamos describir en detalle el proceso de codificación simbólica, es necesario fijar algunas ideas que son esenciales para su operación. Ante todo, tal y como hicimos con el esquema de codificación discreto propuesto en las secciones precedentes, desde un punto de vista práctico, consideramos que la coordenada estatal en un cruce sólo codifica una secuencia simbólica de longitud finita s_1, \dots, s_n en vez de una infinita. Consiguientemente, dado un mensaje arbitrariamente largo, la codificación debe ser realizada emitiendo la secuencia apropiada de coordenadas estatales que conducen al ese mensaje. Entonces, es imperativo saber aplicar las perturbaciones para conducir la trayectoria hacia los puntos apropiados. Para realizar esta operación, es necesario un proceso de aprendizaje. El proceso de aprendizaje está caracterizado principalmente por el tamaño, n , de la secuencia. Para realizarlo, permitimos que el sistema evolucione libremente durante un período largo de tiempo y observamos los valores que la variable $z(t)$ toma en los cruces con las superficies de Poincaré en los n cortes siguientes. De este modo, podemos asociar un conjunto de valores de z con cada uno de los 2^n símbolos posibles. Una propiedad interesante del sistema de Lorenz, que explica por qué es tan frecuentemente utilizado como codificador de la información, es que todos los valores de z que conducen a una secuencia simbólica particular forman un intervalo conexo. Por lo general, a cada uno de estos 2^n intervalos posibles se les denomina un *bin* en la literatura. Una vez que hemos identificado todos los bins, es posible determinar un representante z_{mean} asociado a cada uno de ellos simplemente calculando el valor medio de todos los z que pertenezcan a ese intervalo. Por tanto, el z_{mean} asociado a cada bin determina completamente la secuencia de los próximos n símbolos. En este contexto, podemos recuperar el concepto del *estado simbólico* de un sistema caótico, como hicimos cuando tratamos con mapas caóticos discretos. Recuerde que el estado simbólico de un sistema binario está definido como un número real [35], r , que depende del estado inicial (en este caso z). Su expresión es

$$r = \sum_{i=1}^n f(s_i) 2^{-i}, \quad (3.18)$$

donde $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$. Cuando esta asociación está determinada para todos los bins, tenemos una función $r(z_{mean})$ que relaciona cada secuencia simbólica con el valor apropiado de z_{mean} que la genera. Con esta información, el proceso de aprendizaje puede darse por concluido, porque gracias a ella es posible calcular el valor apropiado de la perturbación que genera cada secuencia simbólica deseada. Es interesante recordar que el inverso de $r(z_{mean})$ es lo que llamamos la *función de codificación de la forma de onda simbólica* cuando trabajábamos con mapas caóticos discretos en la sección precedente. Esta función, que puede ser representada como $z_{mean}(r)$ es la que realmente permite realizar la codificación.

Como el proceso de aprendizaje depende fundamentalmente de la longitud n de la secuencia simbólica, es interesante estudiar como este parámetro afecta a $z_{mean}(r)$.

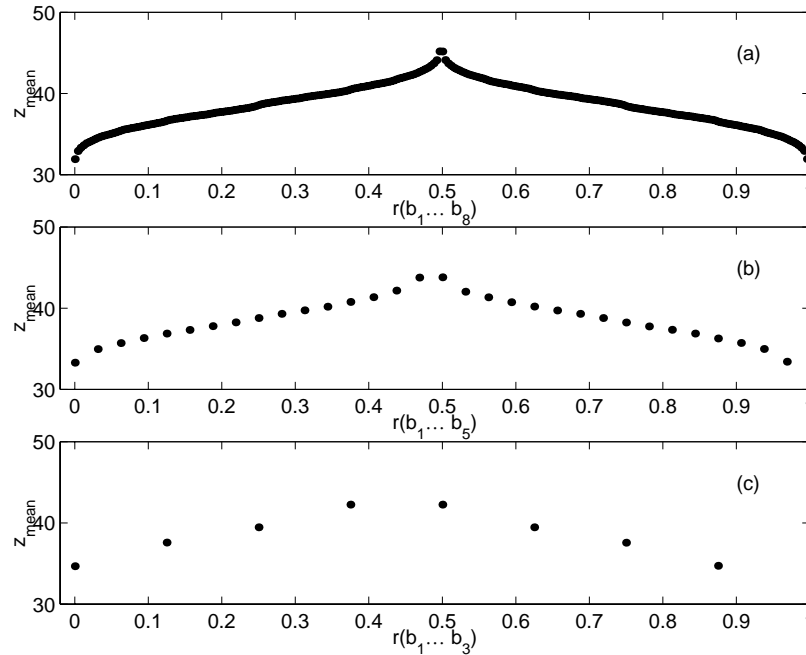


Figura 3.19. La imagen representa la función de codificación de la forma de onda simbólica $z_{mean}(r)$ para tres valores diferentes de la longitud n de la secuencia de símbolo: $n = 8$ en la figura (a), $n = 5$ en la (b) y $n = 3$ en la (c). Como puede observarse, la distancia entre valores vecinos de z_{mean} disminuye exponencialmente con n . La simetría de la función indica que secuencias de bit complementarias pueden ser generadas por el mismo valor de z_{mean} . Esta propiedad es fundamental para el mecanismo diferencial de codificación que proponemos.

La evolución de esta función con n es representada en la Fig. 3.19 para tres valores diferentes de la longitud de la secuencia simbólica. Como puede ser observado, el tamaño de los bins aumenta considerablemente cuando n disminuye. Esto tiene el efecto de producir saltos grandes entre valores de z_{mean} vecinos, lo que se traduce en la necesidad de introducir perturbaciones mayores. Otro rasgo importante de esa figura es que las secuencias simbólicas que comienzan con el mismo símbolo son asociadas a valores estrictamente diferentes de z_{mean} . Esta última propiedad es la que realmente permite la codificación de información sobre este atractor. Finalmente, es importante observar que el tamaño medio de los bins, que llamamos $S(n)$, decae exponencialmente con n [36]

$$S(n) = 36 \cdot 2^{-n}, \quad (3.19)$$

expresión que es válida para el atractor de Lorenz con el conjunto de valores estándar introducidos antes.

Una vez que conocemos todos los detalles sobre el proceso de aprendizaje, podemos explicar el método de control, que permite la codificación de información. En principio, queremos que la forma de onda caótica $x(t)$ represente un mensaje binario,

que podría ser por ejemplo, $M = 0011101011001100100011\dots$. El modo más simple de establecer una codificación es definiendo una correspondencia entre los símbolos A, B y los dígitos binarios 0, 1, identificando, por ejemplo, el símbolo A con el bit 0 y B con 1. Pero usando este principio, encontramos un problema importante. Como el mensaje comienza con un 0 lógico, es obligatorio que el atractor comience sobre la sección de Poincaré apropiada ($x(t)$ debe estar en un mínimo local). Por tanto, esta correspondencia simple no constituye un mecanismo apropiado, porque no podemos garantizar el estado del atractor en el instante inicial. Un acercamiento más inteligente es el de usar una estrategia de codificación diferencial, en la que cualquiera de los bits está asociado con una transición entre dos cruces. De este modo, podemos decir que un 0 lógico viene representado por un cambio en estado simbólico sobre dos cruces consecutivos (AB o BA), mientras el bit 1 es identificado por la repetición del mismo símbolo (AA o BB). De ahí, el mensaje M puede ser representado por la secuencia simbólica $ABAAAABBAAABBABBBAAAABB\dots$, que comienza con el símbolo A ; o bien por $BABBBBAABBBAABAABBBAABBBAA\dots$, que comienza con B . Por tanto, eliminamos los problemas con el estado inicial del sistema. Además, esta codificación diferencial es útil para evitar los problemas relacionados con la simetría de la función de codificación de la forma de onda simbólica, $z_{mean}(r)$. Como puede ser observado en la Fig. 3.19, cada valor de z_{mean} está asociado con dos secuencias simbólicas diferentes, y no podemos saber a priori cual es la que será emitida por el atractor. Sin embargo, como las dos secuencias simbólicas son complementarias, ambas codifican diferencialmente la misma secuencia de símbolos. Aunque esta técnica de codificación diferencial puede parecer demasiado artificial, es usada comúnmente en muchos sistemas de telecomunicación y puede fácilmente ser encontrada en la literatura técnica [6].

En cada cruce, el codificador introduce una pequeña perturbación en la variable $z(t)$. Esta perturbación lleva a la trayectoria a generar la secuencia de n símbolos deseada. Gracias a este mecanismo, la secuencia (s_1, \dots, s_n) contiene $n - 1$ símbolos (s_1, \dots, s_{n-1}) , que están predeterminados porque son los símbolos que el sistema habría generado sin perturbación alguna. Además, la secuencia contiene un símbolo (s_n) suplementario, que es el que realmente determina el valor apropiado de z_{mean} y, por tanto, el de la perturbación necesaria para generarlo. Obsérvese que cuanto mayor es el valor de n , más pequeñas serán las perturbaciones aplicadas y más parecida será la evolución del atractor a la de un sistema libre.

Desde un punto de vista práctico, cada perturbación es escogida para mover la coordenada z al punto central del bin correspondiente a la secuencia de n bits deseada (el valor de z_{mean}). Un procedimiento alternativo, de hecho el más riguroso, es el de mover la coordenada z al punto del bin que produzca la probabilidad más alta de generar la secuencia. Sin embargo, esto haría que el sistema fuese mucho más complejo. Considerando que nuestras simulaciones numéricas muestran que tomar el punto central es una aproximación bastante buena, escogemos esta solución para el resto de este trabajo. En realidad, puede demostrarse que tomar un valor cualquiera dentro del bin también sería una opción satisfactoria, sobre todo para la codificación a corto plazo (valores bajos de n). La razón es que, según la expresión

$S(n) = 36 \cdot 2^{-n}$, tenemos bins más grandes para n pequeño, lo que implica que hay una gama más amplia de valores de z que pueden producir la evolución deseada del sistema caótico.

3.3.2 Un código de canal con corrección de errores

Una vez que el mensaje deseado ha sido codificado en la forma de onda caótica $x(t)$, la operación más sencilla para establecer una comunicación consiste en la transmisión de esta señal caótica $x(t)$ a través de un canal apropiado. En el receptor, el mensaje podría ser decodificado simplemente observando la secuencia de picos positivos y negativos en $x(t)$, que puede haber sido alterada por el ruido térmico o por otras fuentes de distorsión. Esta clase de acercamiento ya ha sido usada en la literatura [36], donde se proponen métodos de reconstrucción de la señal en presencia de ruido impulsivo.

Aquí, exploramos una metodología diferente que consiste en hacer que la señal $x(t)$ no sea transmitida en sí misma. En su lugar, proponemos una solución innovadora e interesante que consiste en la utilización de un sistema de comunicación convencional que actúe como portador de la información. Gracias a este portador, podemos transmitir una representación numérica de la forma de onda, permitiendo que nuestra codificación caótica pueda tener lugar. En esta dirección, usamos el Lorenz para crear una representación redundante del mensaje que debe ser transmitido. Esta redundancia permite que el receptor detecte y corrija algunos errores de transmisión causados por el ruido del canal y otras fuentes de distorsión.

Debido al procedimiento de control que ha sido descrito para codificar el mensaje en la forma de onda caótica $x(t)$, está claro que, una vez que conocemos las condiciones iniciales del sistema de Lorenz, $x(0), y(0), z(0)$, con un grado suficiente de exactitud, toda la información relevante sobre la trayectoria está contenida en los valores de las perturbaciones aplicadas sobre la variable z en cada cruce. Así, una solución inteligente para establecer la comunicación es la de enviar solamente estas perturbaciones. Además, podemos simplificar más el mecanismo usando el esquema representado en la Fig. 3.20, donde la información enviada por el canal consiste sólo en una representación simbólica de la secuencia de valores z_{mean} , que conducen al sistema a la trayectoria pertinente.

Una vez que el método de transmisión ha sido clarificado, somos capaces de entender los detalles de todo el proceso de comunicación, que ocurre siguiendo la secuencia descrita a continuación.

- el mensaje $M = b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$, es convertido en una secuencia de valores $Z = z_{mean}(0), z_{mean}(1), \dots, z_{mean}(k), \dots$ usando la función de codificación de la forma de onda simbólica $z_{mean}(r)$ y el mecanismo diferencial de codificación.
- Un convertidor analógico - digital transforma esta secuencia de valores en un conjunto de palabras digitales simbólicas $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots$. Obsérvese que asumimos que el sistema remoto siempre conoce la condición inicial del sistema. Así, el valor de $z_{mean}(0)$ no tiene por qué ser transmitido. Cada una de estas

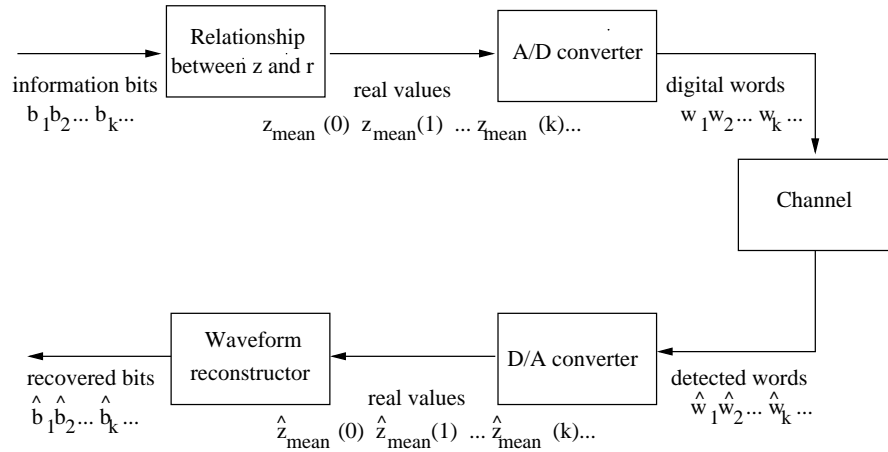


Figura 3.20. Esta figura representa el esquema de comunicación propuesto para nuestro sistema de codificación caótico. Los bits de información b_k son traducidos en una serie de valores $z_{mean}(k)$ a través de la función de codificación de la forma de onda simbólica. Entonces, estos valores son muestreados y transmitidos a través de un sistema de comunicación convencional digital en forma de palabras binarias. En recepción, estas son convertidas nuevamente a su representación numérica, que es finalmente inyectada sobre un oscilador de Lorenz local, del cual se puede recuperar la información recibida \hat{b}_k .

palabras digitales es una señal en formato digital que puede ser fácilmente enviada a través de un sistema de comunicación convencional digital como, por ejemplo, Internet. Consiguientemente, la transmisión puede ocurrir usando métodos clásicos.

- En recepción, un receptor digital recupera las palabras digitales que denominamos $\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_k$. Estos datos recibidos pueden contener errores debido al ruido de canal y a la distorsión. Por tanto, \hat{w}_k podría ser diferente de su correspondiente emitido, w_k .
- Un convertidor digital - analógico transforma las palabras recibidas en una secuencia $\hat{Z} = \hat{z}_{mean}(0), \hat{z}_{mean}(1), \dots, \hat{z}_{mean}(k), \dots$, donde $\hat{z}_{mean}(k) = z_{mean}(k)$ si y

sólo si, $\hat{w}_k = w_k$.

- La secuencia \hat{Z} es entonces utilizada para reconstruir la evolución temporal de la variable $x(t)$ de un sistema de Lorenz perturbado que usa el algoritmo de control descrito previamente. Si ningún error ocurrió durante la transmisión de las palabras digitales, el mensaje recuperado, $\hat{M} = \hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_k, \dots$ coincidirá con el original $M = b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$

El modelo de comunicación que proponemos puede ser visto como un mecanismo que divide el algoritmo de control en dos partes: en el transmisor, tomamos el mensaje y calculamos las perturbaciones (en realidad el valor de $z_{mean}(k)$) que debe ser aplicado sobre el sistema de Lorenz. A continuación, esta información es transmitida al receptor de manera convencional. En el receptor, aplicamos las perturbaciones a un oscilador local de Lorenz estándar y recuperamos la información observando la evolución temporal de la variable $x(t)$.

3.3.3 Protección frente a errores

La recuperación del mensaje de manera apropiada en un receptor que utilice el esquema descrito previamente, depende de si hay errores o no en la transmisión convencional digital. En este caso, la pregunta obvia es ¿por qué es este esquema mejor que uno que consista simplemente en la transmisión de los bits de información $M = b_1, b_2, \dots$ de manera convencional?. La respuesta es que la forma de transmisión propuesta proporciona protección contra errores de transmisión del propio sistema convencional. Observe que los valores $z_{mean}(k)$ son sumamente redundantes. Así, a partir de cualquier z_{mean} correctamente recibido, el sistema puede predecir los siguientes $n - 1$ símbolos.

Como $z_{mean}(k)$ es el valor central del bin asociado a la secuencia de n símbolos b_k, \dots, b_{k+n} , en recepción, es posible recuperar la información del bit b_k , incluso si hay un error y $\hat{z}_{mean}(k) \neq z_{mean}(k)$. Esto es debido a que el símbolo b_k también es codificado en los $n - 1$ valores precedentes de z_{mean} . Cuando hay múltiples errores en la transmisión, la posibilidad de recuperar correctamente la información disminuye, pero en cualquier caso, cuando la probabilidad de error de bit del sistema de comunicación convencional es pequeña, la capacidad de reponerse frente a errores aumenta.

Podemos clarificar este punto con un ejemplo simple. Considere un sistema con una codificación de 5 símbolos y asuma que el valor actual de $z_{mean}(k)$ pertenece, por ejemplo, al bin número 3, que está asociado a la secuencia simbólica 00010. El primer símbolo, 0, representa el cruce actual situado en la posición k . El segundo símbolo 0 representa el siguiente cruce ($k + 1$); que, después de la codificación diferencial, debe tener lugar en la sección de Poincaré opuesta (0 es codificado como AB o BA). El cruce $k + 3$ debería codificar un 1 permaneciendo en la misma sección de Poincaré que el precedente, etc. Transmitiendo la secuencia simbólica 00010 correspondiente al valor actual de z , un solo error en la recepción podría conducir, con una cierta probabilidad, a un $\hat{z}_{mean}(k)$ que esté situado en el bin número 2 o en el 4, que estarían

asociados con las secuencias 00001 y 00011 respectivamente. En ambos casos, dado que ambos ofrecen el mismo valor para el bit actual, el error de transmisión sería evitado.

3.3.4 Puesta en práctica

Para clarificar el funcionamiento del receptor, vamos a desarrollar un ejemplo completo para un esquema de control de 3 símbolos. Este, podría ser puesto en práctica en software y/o en hardware para hacer que dos ordenadores se comuniquen a través de un sistema de comunicación convencional como, por ejemplo, Internet, protegiendo las muestras de información gracias a nuestra codificación caótica. En el transmisor, hay un oscilador de Lorenz local con parámetros estándar que es controlado usando nuestro procedimiento basado en la codificación diferencial. Después de un cruce k (con $k = 0, 1, 2, 3, \dots$), el valor correspondiente $z_{mean}(k)$ es convertido en una palabra binaria w_k , que es transmitida digitalmente. Para ilustrar el método, proponemos un algoritmo más sofisticado que añade un bit de paridad a w_k . Por tanto, la nueva palabra que debe ser transmitida está compuesta de w_k y p_k . El objetivo de este bit de paridad es permitir una detección sencilla de errores de transmisión simples, que son los más probables.

En esta situación, cuando no se detecta ningún error, la palabra obtenida en el receptor es convertida a su forma original, es decir, a su correspondiente valor de z_{mean} . Este es usado para controlar un oscilador de Lorenz local. Por otro lado, cuando se detecta un error, el valor de $\hat{z}_{mean}(k)$ es desechado y ninguna perturbación es aplicada en el cruce k . En este caso, el atractor sigue su propia dinámica intrínseca, permitiendo que la redundancia del sistema recupere esta ausencia. Observe que con este esquema, la perturbación anterior fija los dos símbolos siguientes. Por tanto, en realidad no perdemos información a no ser que dos perturbaciones sucesivas estén ausentes. Considerando esto, podemos entender por qué el sistema propuesto tiene capacidad para corregir errores simples.

El funcionamiento de un sistema que utilice el código de canal descrito ha sido representado en la Fig. 3.21. En ella, la Tasa de Error de Bit codificado (*BER*) representa las prestaciones del sistema propuesto para $n = 3$, mientras que el *Uncoded-VER* indica es la probabilidad de error de bit natural del canal digital convencional. Los puntos codificados de manera caótica, localizados bajo la diagonal principal, indican una reducción en la probabilidad de error, que es equivalente a una mejora de calidad del sistema de comunicación.

3.4 Conclusiones

En este capítulo, hemos mostrado que existe una relación estrecha entre la dinámica caótica y la información, tanto en los mapas discretos como en los sistemas continuos. Esta relación ha sido utilizada para definir dos modelos de comunicación que han sido analizados en profundidad. Ambos modelos están, de algún modo, basados en el concepto de control de caos y, para ambos, proponemos una metodología que

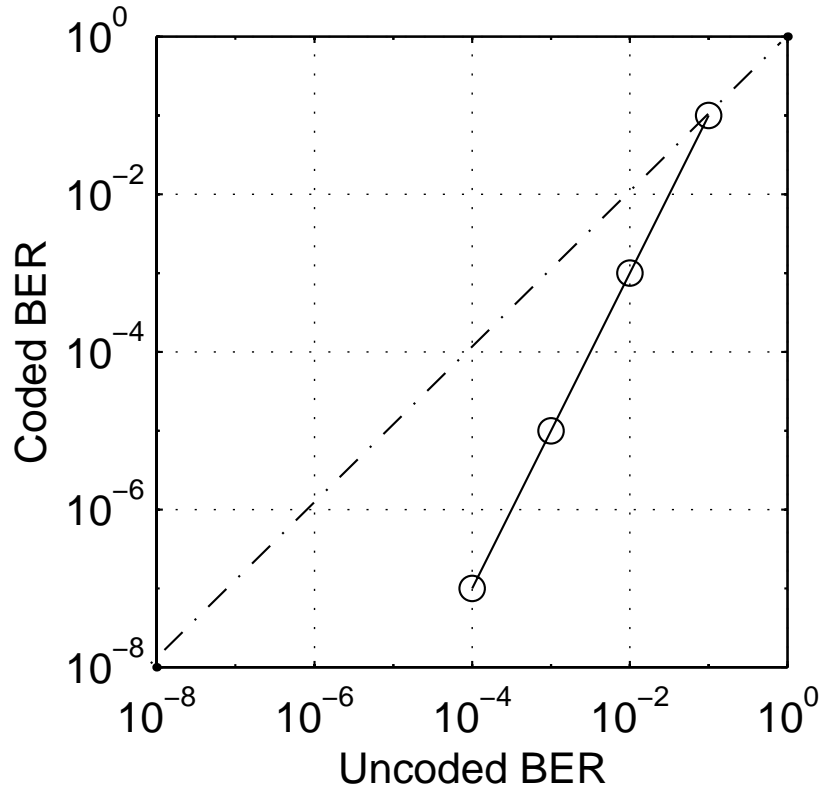


Figura 3.21. Esta figura representa la Tasa de Error de Bit codificada (BER) como una función de la probabilidad de error de bit natural (Uncoded-BER) del sistema de comunicación convencional usado para la transmisión. La codificación está basada en una secuencia de control de 3 símbolos. Como puede observarse, la redundancia inherente del atractor caótico mejora la calidad de comunicación considerablemente, reduciendo la probabilidad de error de bit.

permite ponerlos en práctica en un entorno real de telecomunicaciones.

Para el modelo basado en un mapa discreto, hemos mostrado que es posible mejorar la calidad de las comunicaciones, reduciendo el ruido eficaz, gracias a un algoritmo de paso atrás que tiene en cuenta la relación existente entre muestras sucesivas. Siguiendo un principio similar, hemos demostrado que es posible eliminar la necesidad de enviar todas las muestras de una trayectoria. Las muestras retiradas, más tarde pueden ser reconstruidas a partir de la información recibida y gracias a la redundancia inherente a la dinámica caótica. Gracias a esto, es posible aumentar la capacidad de información de un canal, aproximándolo al Límite de Shannon para una región particular de la relación señal a ruido.

Para la metodología de codificación - decodificación caótica continua, hemos mostrado que la dinámica caótica del atractor de Lorenz permite que se corrijan errores de transmisión en una comunicación. Uno de los logros más interesantes y novedosos presentados en relación con este sistema es una metodología que permite

su puesta en práctica en software sobre una red de telecomunicación convencional como, por ejemplo, Internet.

Aunque los dos modelos propuestos puedan ser implementados en la práctica, a día de hoy ninguno de ellos puede considerarse lo suficientemente maduro como para mejorar las técnicas tradicionales usadas en ingeniería. Para entender por qué, observemos que cuando los diseñadores afrontan el desarrollo de un nuevo sistema de comunicación digital, su objetivo es proporcionar un mecanismo rentable para transmitir la información desde un extremo a otro de un sistema con una tasa y con un nivel de fiabilidad y de calidad que sea aceptable. Los dos parámetros clave del sistema, con los que el diseñador debe trabajar, son la potencia de la señal transmitida y la anchura de banda de canal. Estos dos parámetros, junto con la densidad espectral de ruido en recepción, determinan el parámetro fundamental que mide las condiciones de comunicación: la relación señal a ruido. En este sentido, sólo podemos decir que mejoramos un sistema de comunicación si conseguimos transmitir con la misma tasa de transmisión y con la misma calidad pero usando una potencia de señal inferior o una anchura de banda de canal más pequeña. En esta dirección, las comunicaciones caóticas no mejoran las técnicas tradicionales de la ingeniería porque no pueden ofrecer ninguna ventaja en términos de costes, de potencia de señal o de anchura espectral. Sin embargo, las conclusiones obtenidas en este capítulo son muy interesantes desde una perspectiva teórica. Estos logros son notables porque muestran que existe una conexión estrecha entre la teoría de la información y la dinámica caótica. Conexión que podría ser de gran interés científico y tecnológico en algunos ámbitos particulares como la dinámica de láseres o los sistemas bio - inspirados.

Finalmente, es interesante hacer algunos comentarios en relación con el esquema discreto de codificación y proponer un desarrollo adicional que podría tener gran importancia teórica. Como Shannon hizo notar en su artículo original [4], la demostración que conduce al establecimiento del límite de Shannon no es constructiva, sino probabilística. Esto significa que sólo demuestra que existe un modo de codificar la información que hace que la capacidad del canal para un sistema dado sea igual a este límite, pero no muestra cuál es esa técnica de codificación. Hoy en día, existe un conjunto de códigos llamados *turbo códigos*, que se acercan notablemente al límite de Shannon, pero que son complicados de llevar a la práctica. Frente a esta situación, el mecanismo discreto que proponemos es bastante simple y fácil de implementar en un sistema basado en un procesador digital. Lamentablemente, este no mejora el funcionamiento de los turbo códigos. Sin embargo, el algoritmo de decodificación hacia atrás que proponemos no es necesariamente el mejor que puede ser encontrado usando estos principios. Por esta razón, podría ser interesante investigar si es posible concebir un decodificador óptimo, que podría alcanzar unas prestaciones similares a las de los turbo códigos, pero con un coste inferior en términos de dinero, complejidad y tiempo de proceso.

Parte II

Modelos en la frontera

Capítulo 4

Conjuntos neuronales y comunicaciones inalámbricas

4.1 Introducción

En los capítulos precedentes, estudiamos las capacidades de algunos sistemas simples aislados para actuar como fuentes o como receptores de información. En todos esos sistemas no existe ninguna interacción aparte de la estrictamente necesaria para establecer el proceso de comunicación entre un emisor y un receptor. Esta ausencia de interacciones entre los elementos es lo que nos permite afirmar que estos sistemas actúan de manera aislada.

Frente a esta situación, en esta segunda parte de la tesis nos vamos a dedicar al estudio de sistemas compuestos de múltiples componentes. En esta dirección, nuestro objetivo en este capítulo es investigar las propiedades como receptor de información, de un conjunto neuronal, donde todas las neuronas comparten una señal común de información, pero, al mismo tiempo, tienen fuentes independientes de ruido. Obsérvese que usamos el término *conjunto de neuronal* en vez de la denominación tradicional de *red neuronal*. La razón para hacerlo es que, en este primer paso hacia los sistemas de múltiples componentes, adoptamos el escenario más simple posible, en el que asumimos que no hay ninguna interacción entre las neuronas. Para ser más exacto, supondremos que en un conjunto neuronal el comportamiento dinámico de una neurona no se ve afectado por el comportamiento de las demás, tal y como es aceptado en una red neuronal. Es importante comentar que esto no significa que las neuronas del conjunto estén aisladas. Como entenderemos a lo largo del capítulo, la información albergada por los elementos simples será procesada posteriormente por otro elemento del sistema.

Podemos observar que la diferencia principal entre el modelo propuesto en este capítulo y el resto de los modelos de esta parte es que, en este caso particular, no es posible definir una noción de red. La ausencia de una topología de interconexión entre los elementos nos permite afirmar que el contenido algorítmico de información necesario para describir el sistema es inferior que en el resto de los casos. Esta es la razón por la que este capítulo es el primero dentro de esta parte.

Volviendo a conceptos más prácticos, nuestro objetivo en este capítulo es definir y analizar un modelo de receptor de comunicación digital basado en un conjunto

neuronal En este sentido, nuestro primer paso es el de proporcionar una base matemática que describa los conceptos más complicados del modelo. Después de esto, definimos un receptor de comunicación digital conveniente que puede ser usado en asociación con transmisores convencionales banda de base. Finalmente, hacemos una revisión crítica del modelo y proponemos algunas aplicaciones prácticas en las que podría ser usado satisfactoriamente.

4.2 El modelo

Hay muchos ejemplos en la literatura en los que una señal simple, compuesta por lo general por estímulos periódicos, es procesada en presencia de ruido por neuronas aisladas [42, 43, 44, 45, 46, 47] o por poblaciones neuronales [48]. En esta situación, para señales subumbral, uno puede encontrar un fenómeno de resonancia estocástica [49]. Las investigaciones más recientes en este campo se han enfocado en modelos conducidos por una señal periódica y ruido aditivo Gaussiano de una intensidad constante. Estas condiciones son apropiadas para describir la situación de neuronas sensoriales o corticales, que reciben trenes de impulsos excitatorios (de amplitud positiva) e inhibitorios (de amplitud negativa) [50, 51]. En este contexto, estamos en particular interesados en el trabajo de Lindner [52]. En él, se considera una entrada que consiste en un tren excitatorio y un tren inhibitorio con amplitudes postsinápticas de potenciales $a_e = 1/n$ y $a_i = 1/n$, pero con intensidades $\lambda_e = (an + bn^2)s(t)$ y $\lambda_i = bn^2s(t)$ respectivamente. La interpretación de estas tasas es sencilla: la fuente de la entrada es un conjunto de aproximadamente $(an + bn^2)$ neuronas excitatorias y bn^2 neuronas inhibitorias que comparten una tasa dependiente de tiempo común $s(t)$, que contiene, por ejemplo, una señal periódica. En la aproximación de difusión [50, 51], el tren de pulsos es substituido por la entrada

$$i(t) = as(t) + \sqrt{2bs(t)}\xi(t). \quad (4.1)$$

En esta situación, la señal está codificada por el ruido de manera efectiva, ya que esta modula la intensidad del ruido blanco Gaussiano $\xi(t)$. En ocasiones, una modulación de ruido también puede conducir a un fenómeno de resonancia estocástica tal y como fue demostrado para un sistema biestable en [53], y para sistemas neuronales, con entradas similares a las de la Ec.(4.1), en [54, 55]. Recientemente, también se ha mostrado que la respuesta de un conjunto de neuronas puede ser mejorada aumentando la intensidad de ruido multiplicativo sobre la señal. Todos estos resultados indican usos potenciales para señales codificadas con ruido.

Además del ruido multiplicativo, es esencial considerar el tradicional ruido aditivo blanco Gaussiano, que llamamos $\eta(t)$. Así, la entrada total de una neurona aislada es

$$I(t) = i(t) + \mu_{bg} + \sqrt{2D_{bg}}\eta(t), \quad (4.2)$$

donde $i(t)$ es el dado por la Ec.(4.1). Como se demuestra en [52], la respuesta de esta clase de conjunto neuronal a una señal como la dada en la Ec.(4.2), muestra resonancia estocástica con respecto a la intensidad de ruido. Además, la salida

revela una transmisión en frecuencia eficiente sin retardos en la señal, en contraste con otros sistemas tradicionales que presentan resonancia estocástica como el doble pozo de potencial.

Teniendo la descripción de la entrada, proponemos un modelo, que consiste en un conjunto de N neuronas *integrate-and-fire*, cuya entrada es conducida por la expresión presentada en la Ec.(4.2). El modelo de neurona integrate-and-fire es uno de los más simples y el más extensamente usado en la literatura. Basándonos en él, el voltaje de la membrana u es descrito por una ecuación de la forma

$$\dot{u} = a - bu + I, \quad (4.3)$$

donde a y b son constantes e I es nuevamente la entrada de la neurona. En el modelo presentado en [52], la entrada es restringida a un caso simple periódico donde $s(t) = \epsilon_0 + \epsilon \cos(\Omega t)$ en el que no hay correlación entre las entradas a neuronas diferentes. Por tanto, la respuesta de la neurona, viene descrita por un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con límite de absorción en el umbral de disparo u_{th} . Cuando el potencial de la membrana u alcanza el umbral, la neurona dispara una δ y después es absolutamente refractaria durante un periodo de duración τ . Durante este tiempo, el potencial de membrana debe ser fijado a un nivel de reposo μ . Después de esto, el voltaje es recompuesto a $u_{reset} = 0$.

En esta situación, las N neuronas comparten los mismos estímulos periódicos, sin embargo, las partes fluctuantes de sus entradas son completamente independientes. Es importante destacar otra vez que no existe ninguna conexión entre las diferentes neuronas. Usando este modelo, puede demostrarse que la actividad media de las células $r(t)$ (la tasa media de disparo de una neurona aislada) presenta resonancia estocástica con respecto a la intensidad de ruido D_{bg} . Todos los detalles sobre este interesante fenómeno han sido descritos en [52]. Sin embargo, nuestro interés está concentrado en algunos de los aspectos de este sistema, que pueden permitir la definición de un modelo de comunicación basado en sus principios. Esta tarea será realizada en la sección siguiente.

4.3 Un modelo de comunicación

Hay muchas coincidencias sorprendentes entre el modelo neuronal propuesto en la sección precedente y los sistemas de telecomunicación usados en nuestros días. La primera conjunción está en relación con la entrada de los sistemas. En este sentido, es interesante observar que la entrada neuronal I descrita en la Ec.(4.2) está compuesta de tres componentes aditivas: el término $i(t)$ que proviene de la Ec.(4.1), un término constante μ_{bg} y un ruido aditivo blanco Gaussiano $\sqrt{2D_{bg}}\eta(t)$. Esta ecuación puede ser asimilada fácilmente a la forma de la entrada de un sistema de telecomunicación digital, que toma siempre una expresión similar a

$$I_c(t) = i_c(t) + \eta_c(t), \quad (4.4)$$

siendo $I_c(t)$ la entrada al receptor, $i_c(t)$ la señal que lleva la información y $\eta_c(t)$ el ruido de canal. Ambos tipos de señales son equivalentes si hacemos que $i_c(t) = i(t) +$

μ_{bg} y $\sqrt{2D_{bg}}\eta(t) = \eta_c(t)$. En estas circunstancias, como se demostró en la sección precedente, la respuesta del conjunto neuronal presenta resonancia estocástica sobre la intensidad de ruido D_{bg} . Esta característica podría ser útil para reducir al mínimo el efecto de la degradación del ruido $\eta_c(t)$ sobre la calidad de la comunicación. Sin embargo, hay una diferencia conceptual notable entre los dos casos. En el caso del conjunto neuronal, la componente $i(t)$ está esencialmente basada en una forma de onda periódica $s(t)$. Como ya sabemos, una señal periódica no puede transportar ninguna información. Así, $i_c(t)$ no puede ser realmente asociada con $i(t)$.

En este sentido, proponemos una modificación del modelo que consiste en considerar una señal de entrada que sea una onda de telecomunicación digital. Estas señales pueden ser expresadas de múltiples maneras, pero la más común es la de usar un pulso binario bipolar. Recordemos que, considerando un mensaje M digital binario compuesto de una secuencia de bits b_1, b_2, b_3, \dots , la representación a través de pulsos bipolares de este mensaje se realiza con una señal $s_c(t)$ compuesta de una secuencia de pulsos positivos y negativos de duración fija T y de amplitud A . Cada 1 lógico viene representado por un pulso positivo y cada 0 lógico por uno negativo, usando un mecanismo de modulación por impulsos de código (Pulse Code Modulation - PCM) (consultar el Capítulo 1). Así, la señal $i_c(t)$ que transporta la información no será periódica y sus propiedades estadísticas dependerán del mensaje M transmitido.

Además de esta modificación, es necesario observar que, desde la perspectiva de las comunicaciones, no tiene sentido modular la señal con un ruido Gaussiano. A causa de esto, la señal $i_c(t)$ no puede ser identificada con $i(t)$ incluso en el caso de $s(t)$ no periódica. Por esta razón, deberíamos eliminar el término de ruido de la Ec.(4.1). Esto tiene una contrapartida que es la eliminación de la resonancia estocástica introducida por esa modulación, sin embargo, al hacerlo podemos identificar completamente nuestro código digital con el tipo de entradas apropiadas para el conjunto neuronal.

Una primera consecuencia de esta modificación es que todo el análisis matemático realizado en [47] deja de ser aplicable. Sin embargo, uno puede esperar que las características principales de la solución todavía sean válidas. En particular, el hecho de que el promedio de la tasa se dispare del conjunto neuronal siga, con poco retardo, la forma de la señal de información. Con estas expectativas, proponemos un nuevo modelo de comunicación inspirado en el conjunto neuronal descrito en la sección precedente. Este modelo de comunicación, que se muestra en la Fig. 4.1, está compuesto de un emisor digital convencional basado en una modulación PCM bipolar. El emisor toma un mensaje $M = b_1, b_2, \dots$ y genera la señal $s_c(t)$ descrita previamente. Esta señal es enviada por un canal ruidoso en un proceso de transmisión. Cuando se alcanza el receptor, la señal toma la forma familiar presentada en la Ec.(4.4), que puede ser simplificada con las restricciones que acabamos de introducir

$$I_c(t) = s_c(t) + \eta_c(t). \quad (4.5)$$

Esta señal es entonces introducida en un receptor compuesto de un conjunto de N neuronas como las que acabamos de describir en la sección precedente. Un aspecto

esencial de este receptor, que es crucial para entender sus capacidades especiales, es que, como asumimos antes, el ruido de canal $\eta_c(t)$ es independiente para cada una de las neuronas que pertenecen al conjunto. En esta situación, podemos esperar que el promedio de la tasa de disparo, para valores de a por encima de u_{th} , siga la forma de onda de la señal $s_c(t)$ que lleva la información. Esto significa que cuando $s_c(t)$ representa un 1 lógico (es decir, presenta un pulso positivo), la tasa de disparo $r_c(t)$ aumenta, tomando una distribución centrada en un valor particular R_1 , que depende del número de neuronas N del conjunto y sobre todo de la amplitud A de los pulsos. Por otra parte, cuando $s_c(t)$ lleva un 0 lógico (un pulso negativo), $r_c(t)$ disminuye, en promedio, a un límite inferior R_0 que debe estar, en principio más cerca de cero.

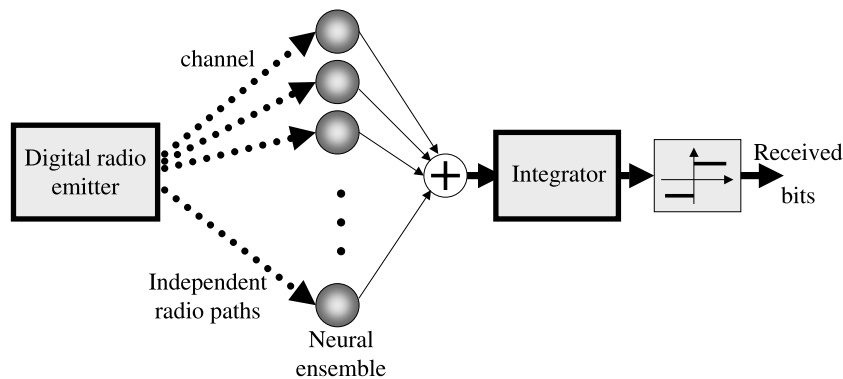


Figura 4.1. Esta imagen representa un modelo de comunicación basado en un conjunto de neuronas integrate-and-fire. El emisor puede ser un transmisor convencional de radio digital. El receptor está compuesto de tres módulos: el conjunto neuronal, un integrador (correlator) y un comparador de umbral.

Si la tasa media de disparo $r_c(t)$ toma valores diferentes para los diferentes bits, es posible recuperar la información transportada por la señal $s_c(t)$. En esta dirección, la decodificación de la información en el receptor debe comenzar calculando el promedio de la tasa de disparo. El hecho de que las neuronas generen un δ cuando el potencial de membrana alcanza el umbral es problemático, porque en una neurona real la generación de funciones δ no es factible. En este sentido, por motivos prácticos, debemos introducir una modificación menor en el modelo, asumiendo que la respuesta de nuestra nueva neurona viene descrita por una respuesta modificada δ_c . Esta función δ_c está definida como un pulso positivo de duración Δt y de ampli-

tud normalizada. El intervalo Δt puede ser visto como un período de muestreo en el contexto de un dispositivo de comunicación digital. En este escenario, la tasa media de disparo puede ser aproximada como la suma de todas las respuestas neuronales dividida por Δt :

$$r_c(t) = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_{ci}(t)}{\Delta t}, \quad (4.6)$$

donde $\delta_{ci}(t)$ es la respuesta modificada de la neurona i en el instante t . Es evidente que esta estimación mejora cuando N aumenta y que podría ser demasiado pobre para valores bajos de N .

Una vez que $r_c(t)$ ha sido evaluado en el receptor, es necesario extraer la información digital que contiene. Esto puede ser realizado comparando su valor con R_1 y R_0 , pero esta no es una tarea inmediata, porque $r_c(t)$ toma muestras separadas Δt en el tiempo. Esto significa que para cada pulso, el número de intervalos de tiempo a tener en cuenta es $\frac{T}{\Delta t}$. Es posible realizar un análisis estadístico de las muestras, pero esto puede ser complicado y preferimos usar una técnica más familiar en el marco de los sistemas de comunicación: la correlación.

De la misma manera que los sistemas de comunicación digital convencionales realizan una correlación entre la entrada y una señal maestra, es posible en nuestro sistema realizar la misma operación entre la señal $r_c(t)$ y un pulso normalizado positivo. El correlator que usamos está sincronizado con $s_c(t)$ y actúa siguiendo un patron bit-por-bit, lo que significa que calcula la integral de correlación durante la duración de un pulso T , y después es reseteado en cada límite de bit. En este sentido, puede ser entendido que, cuando un 1 lógico es recibido, la salida del correlator debe estar cerca de un valor $C_1 = R_1 T$ mientras que su salida para un 0 lógico debería estar cerca de $C_0 = R_0 T$. La utilización de esta técnica produce una simplificación notable del sistema de decodificación, porque la detección de los bits puede ser lograda simplemente utilizando un comparador simple. Si establecemos un umbral en el valor

$$C_{th} = \frac{C_0 + C_1}{2}, \quad (4.7)$$

podemos decidir que recibimos un 1 lógico cuando el valor de la correlación está sobre C_{th} y que un 0 lógico es obtenido cuando este valor está bajo ese umbral. Es importante comentar que, en este esquema, hemos asumido que no tenemos ninguna información anterior al mensaje M transmitido. Esto significa que aceptamos que la entropía (la incertidumbre) del mensaje es máxima, $H(M) = 1 \text{ bit/simbolo}$. Esto es equivalente a asumir que las probabilidades de un 0 lógico y un 1 lógico en el mensaje son las mismas ($p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$).

4.4 Puesta en práctica

En esta sección, deseamos analizar las potenciales aplicaciones prácticas de este modelo de comunicación. Para este fin, asumimos un doble objetivo: en primer lugar, evaluar el funcionamiento del sistema en un escenario de telecomunicaciones

realista; en segundo, realizar una revisión crítica de la viabilidad de desarrollar un dispositivo electrónico que ponga en práctica el receptor propuesto.

En relación con la segunda cuestión, es importante comentar que no existe ninguna razón tecnológica que impida la elaboración de tal dispositivo. Todos los algoritmos y técnicas propuestos son susceptibles de ser puestos en práctica en un dispositivo de procesamiento digital. Además, la mayor parte de ellos ya han sido construidos sobre hardware específico [56, 57], lo que abre la posibilidad de funcionamiento a tasas de transmisión y muy elevadas. El problema fundamental de este esquema de comunicación no viene del dispositivo en sí mismo, sino de la entrada que requiere. Recordemos que para cada una de las N neuronas, debemos obtener una señal de entrada como la dada en la Ec.(4.5), donde el ruido Gaussiano $\eta_c(t)$ debe ser independiente para cada una de ellas. Esto puede ser un problema importante en un escenario realista. Para entender por qué, imaginemos un sistema de comunicación convencional basado en un coaxial o en un cable de fibra óptica. En estas circunstancias, la señal de información emitida $s_c(t)$ viaja por el medio hasta que llega a su destino. Allí, podemos usar un par de sensores para obtener dos copias diferentes de la señal. Sin embargo, las posibilidades de que las componentes de ruido de ambas formas de onda sean independientes son muy pequeñas. Esto es debido a que las dos señales han viajado siguiendo el mismo cable y, por consiguiente, han recibido probablemente las mismas perturbaciones. Por tanto, para obtener ruidos independientes deberíamos tener canales independientes, condición que en este caso sólo podría ser alcanzada disponiendo de dos medios de comunicación separados. Como consecuencia de estos argumentos, para el modelo de N neuronas, N cables diferentes serían necesarios, lo que no es una solución interesante desde una perspectiva práctica.

Estas conclusiones pueden parecer desalentadoras, sin embargo, es posible contemplar un tipo diferente de sistema que está alcanzando una gran importancia en nuestros días: las comunicaciones inalámbricas. En las comunicaciones inalámbricas la transmisión ocurre en forma de ondas electromagnéticas que viajan en el aire. Cuando hay visión directa entre el emisor y la antena de recepción, la comunicación posee por lo general una alta calidad, pero esto no es siempre posible. Por ejemplo, en el marco de la telefonía móvil, es imposible garantizar la visión directa entre el terminal y la antena del operador. En esta situación, la señal emitida debe seguir caminos compuestos de varias reflexiones sobre edificios, coches, etc. En este caso, lo interesante es que no hay un solo camino para que la señal vaya del emisor al receptor. De hecho, puede ser demostrado que para antenas cuasi isotrópicas, como las usadas en esta clase de terminales, existe un conjunto casi infinito de caminos diferentes para que la señal pueda viajar desde el teléfono hasta la estación base. Esto abre una posibilidad interesante para nuestro dispositivo neuronal. Podríamos imaginarnos un receptor compuesto de N antenas direccionales independientes que incidan sobre direcciones diferentes. En esta situación, las antenas deberían recibir señales que tengan componentes de ruido completamente independientes, porque cada una de ellas ha seguido un camino diferente en la atmósfera y, así, ha recibido perturbaciones separadas. Esta metodología de multitrayecto es una solución inte-

resante para obtener las señales de entrada necesarias en nuestro dispositivo. Una desventaja notable de este acercamiento, que es conocida por los ingenieros de radio, consiste en que, como las señales siguen caminos diferentes, también cubren distancias distintas y, por tanto, es posible obtener diversas ondas con fases diferentes. Lamentablemente, este cambio de fase debido al multitrayecto crea problemas en el mecanismo de recepción que no pueden ser evitados fácilmente. El único método para garantizar la recepción apropiada es disminuir la tasa de transmisión hasta que el desfase sea insignificante. En cualquier caso, nuestro objetivo en este capítulo no es tratar con este problema particular. El hecho importante es que, para esta clase de sistemas, es viable obtener un conjunto de N copias diferentes de la señal de información con ruidos independientes, incluso si esto tiene que ser realizado a una velocidad baja.

Una vez que sabemos que el esquema de comunicación propuesto puede ser puesto en práctica como un sistema inalámbrico, el siguiente paso es evaluar sus prestaciones y compararlas con técnicas convencionales. Para esto, hemos desarrollado un software que pone en práctica todos los pasos del modelo. Este software es una transcripción directa de los algoritmos dados al lenguaje de programación C. La única dificultad que podemos encontrar al realizar esta tarea está asociada con el comparador del receptor. Como ya hemos adelantado, el proceso de decodificación está basado en la comparación de la correlación de la señal $r_c(t)$ con el umbral C_{th} dado en la Ec.(4.7). El problema es que, para evaluar este umbral es necesario conocer el valor de C_1 y C_2 . Estos valores dependen de muchos factores como el tamaño N del conjunto neuronal, las propiedades dinámicas de las neuronas (a , b , u_{th} , ...), la intensidad del ruido de canal, la duración T de los pulsos, etc. Su evaluación analítica podría ser sumamente difícil y está fuera de los objetivos de este trabajo. Por tanto, desde un punto de vista práctico, podemos asumir una estrategia que es útil en este tipo de situación: utilizar una técnica de aprendizaje.

El proceso de aprendizaje que proponemos es directo y simple. Considerando un esquema de comunicación específico (un receptor particular en un medio concreto), comenzamos la comunicación enviando a un número n_{learn} de 0s lógicos. El receptor, que está preparado para recibir estos bits de muestra, estima el valor de C_0 para esa secuencia evaluando la correlación de $r_c(t)$ para cada bit y haciendo un promedio. Después de esto, el mismo proceso es repetido para n_{learn} 1s lógicos. Cuando el proceso de aprendizaje ha terminado, el dispositivo es capaz de calcular una aproximación conveniente de C_{th} simplemente aplicando la Ec.(4.7). Una vez que esto ha concluido, la verdadera comunicación puede comenzar transmitiendo los bits apropiados de información correspondientes al mensaje deseado. Usando esta técnica, podemos determinar la calidad del sistema de comunicación, que por lo general está expresada en términos de la probabilidad de error de bit p_{err} como una función de la relación señal a ruido (SNR) (consultar el Apéndice B). Con este objetivo, hemos realizado simulaciones sobre el sistema, cuyos resultados se muestran en la Fig. 4.2. En todos los casos, hemos considerado que los mensajes tienen 10^6 bits con $n_{learn} = 10^4$ iteraciones. Como puede ser observado, para una neurona aislada ($N = 1$), la calidad del sistema es ligeramente inferior a la del filtro adap-

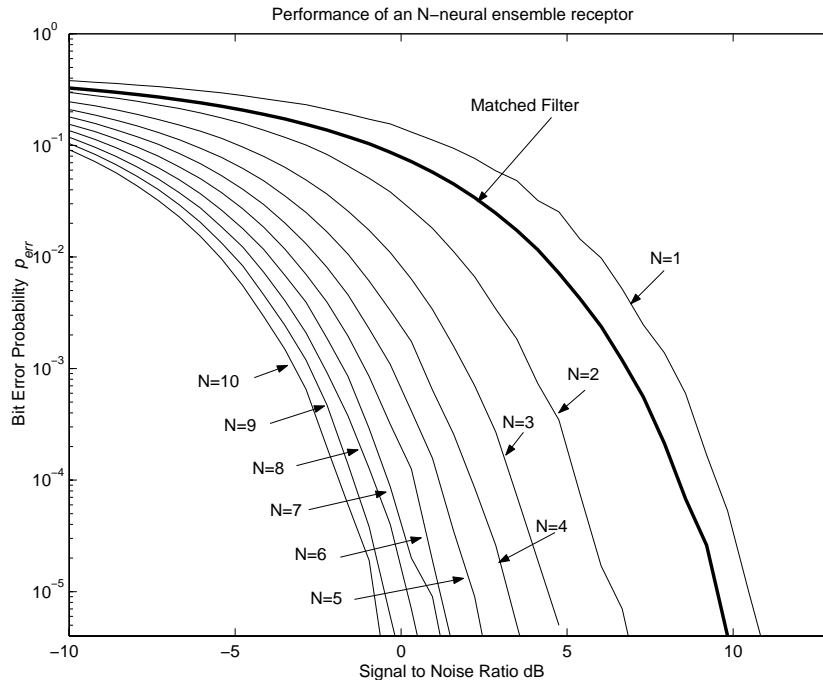


Figura 4.2. Esta figura representa la Probabilidad de Error de Bit p_{err} de un sistema de comunicación basado en un conjunto neuronal como una función de la relación señal a ruido (SNR) expresada en decibelios. La línea sólida más ancha indica el funcionamiento de un sistema de receptor lineal basado en un filtro adaptado. El resto, corresponde a 10 receptores neuronales con N variando de 1 a 10. Como puede ser observado, para $N > 2$, el conjunto neuronal recibe con una calidad mayor (menor p_{err}) que el filtro adaptado. La simulación ha sido realizada para neuronas con parámetros $a = 1$, $b = 1$, $v_{th} = 0.2$, $\tau = 0$, $v_r = 0$. El proceso de aprendizaje ha sido realizado con $n_{learn} = 10^4$ bits. La p_{err} ha sido calculada sobre un promedio de 10^6 bits.

tado, que es el mejor receptor lineal (consultar el Apéndice B) y es usado en casi todos los dispositivos de comunicación comerciales en nuestros días. Sin embargo, para $N > 1$, nuestro dispositivo mejora considerablemente el funcionamiento del filtro adaptado, obteniendo un beneficio de casi $10dB$ para $N = 10$.

4.5 Conclusión

En esta sección, hemos propuesto el concepto de conjunto neuronal, en el que las neuronas no interactúan entre sí, pero donde la información es procesada colectivamente en una etapa posterior realizando un promediado. Hemos mostrado que, bajo la asunción de ruido independiente, esta clase de sistema puede ser usado para la definición de una nueva clase de receptor digital.

El modelo propuesto puede ser puesto en práctica gracias a un proceso de apren-

dizaje expresamente concebido. Cuando el funcionamiento del sistema es evaluado, mostramos que, conforme a la hipótesis de ruido de canal independiente sobre las neuronas, el conjunto neuronal es capaz de mejorar la calidad del filtro adaptado: el mejor receptor lineal que con frecuencia es usado en nuestros días en el ámbito de la ingeniería de telecomunicación.

Aunque la hipótesis de ruidos independientes no pueda ser verificada en la mayor parte de los sistemas de comunicación, mostramos que es posible asumir que en muchos sistemas de comunicación inalámbricos puede ser satisfecha. Esto es una conclusión notable y significativa con una consecuencia fundamental: en esta clase de sistemas, es posible aumentar la capacidad sin necesidad de aumentar la potencia de ruido de señal. Desde un punto de vista práctico, estos resultados son interesantes, principalmente porque los dispositivos inalámbricos son, por lo general, móviles, y tienen limitaciones severas en términos de consumo de potencia. De hecho, una idea similar basada en la existencia de múltiples caminos de transmisión está siendo usada actualmente en el desarrollo de una nueva clase de receptores de radio conocidos como *antenas inteligentes*. En este sentido, podría ser muy interesante investigar los usos potenciales de los conjuntos neuronales en este campo particular de la ingeniería.

Finalmente, desde una perspectiva crítica, es importante comentar que el problema relacionado con el desfase de la señal debido al efecto de multitrayecto debería ser analizado con mayor detalle. Desde un punto de vista práctico, esta clase de sistemas no pueden llegar a ser útiles si no aprendemos a minimizar este efecto sobre la respuesta del conjunto neuronal. Problemas similares relacionados con este fenómeno de multitrayecto son, hoy en día, sujeto de una intensa investigación en el campo de las antenas inteligentes y los sistemas digitales inalámbricos de alta velocidad. Un análisis profundo sobre el comportamiento de los conjuntos neuronales en relación con este problema podría ser del gran interés teórico y podría sugerir nuevas e interesantes aplicaciones.

Capítulo 5

Efectos no lineales en estructuras inducidas por ruido

5.1 Introducción

En el capítulo precedente consideramos un sistema compuesto de múltiples elementos simples no lineales y demostramos que, incluso cuando no hay ninguna interacción entre ellos, es posible aprovechar sus respuestas para mejorar las prestaciones de un procesamiento particular de señal. El siguiente paso en nuestro camino hacia la complejidad es el de comenzar a explorar sistemas donde los componentes constituyentes interactúan entre sí. En este contexto, interactuar significa tener la capacidad de intercambiar información, de modo que la evolución dinámica de un elemento depende, no sólo de su estado, sino también del estado del resto.

Se puede decir mucho sobre sistemas no lineales en interacción, sin embargo, nuestro interés en este campo está concentrado en un tipo concreto de elementos acoplados de un modo muy particular. En esta dirección, tomamos como componente elemental un oscilador no lineal sobreamortiguado. Suponemos que la interacción entre los osciladores es difusiva y que la topología de interconexión adopta la estructura de una rejilla regular de dimensión n . En particular, tomamos el sistema acoplado introducido en [58], que puede ser descrito a través del siguiente conjunto de ecuaciones de Langevin

$$\dot{x}_i = f(x_i) + g(x_i)\xi_i(t) + \frac{D}{2d} \sum_{j \in nn(i)} (x_j - x_i), \quad (5.1)$$

donde $x_i(t)$ representa el estado del $i^{ésimo}$ oscilador ($i = 1, \dots, L^d$), en una rejilla cúbica de tamaño L en d dimensiones con $N = L^d$ elementos. La suma se extiende a los vecinos más cercanos a la célula $i^{ésima}$ $[nn(i)]$, y la fuerza del acoplamiento está medida por D . El término de ruido $\xi(t)$ representa el ruido blanco Gaussiano, con media nula e incorrelado tanto en el espacio como el tiempo,

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = \sigma_m^2 \delta_{i,j} \delta(t - t'). \quad (5.2)$$

Para simplificar, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son de la forma [59]

$$f(x) = \begin{cases} -G_b x - (G_a - G_b)B_p & \text{if } x \leq -B_p, \\ -G_a x & \text{if } |x| < B_p, \\ -G_b x + (G_a - G_b)B_p & \text{if } x \geq B_p, \end{cases} \quad (5.3)$$

$$g(x) = x, \quad (5.4)$$

donde los parámetros $G_a = 0.5$, $G_b = 10$ y $B_p = 1$ determinan las pendientes y los límites de una curva lineal a tramos, que es una aproximación de la función $h(x) = -x - x^3$. Hemos escogido tal conjunto de parámetros porque describen una situación realista que puede ser fácilmente puesta en práctica en un circuito electrónico como el que descrito en [75]

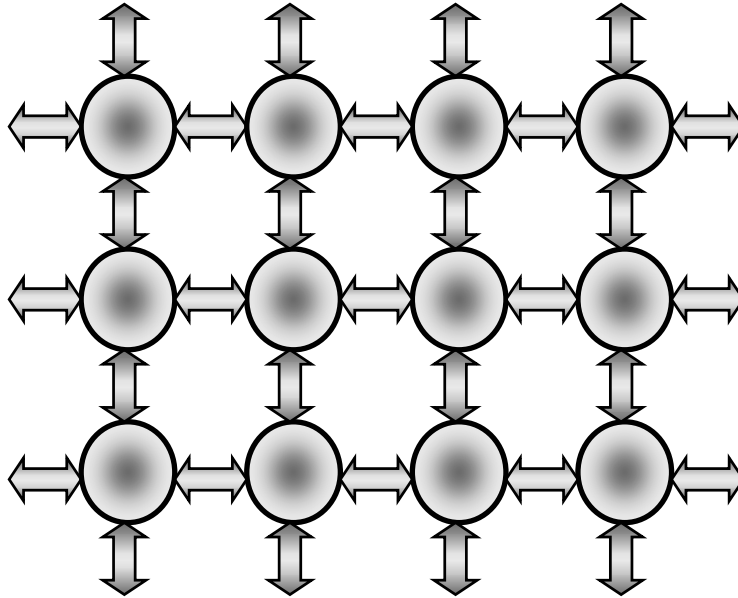


Figura 5.1. La figura muestra una rejilla regular en 2D que representa la topología de interconexión entre los osciladores no lineales sobreamortiguados.

Este conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas no tiene nada excepcional salvo por la introducción peculiar del ruido multiplicativo ξ_i . El ruido, por lo general, es considerado como un fenómeno que perturba la observación y crea desorden. Esta idea está principalmente basada en nuestra experiencia del día a día y, en el contexto de la física, en el estudio de sistemas en equilibrio. El efecto del ruido, sin embargo, puede ser bastante diferente en sistemas no lineales fuera del equilibrio. Varias situaciones han sido documentadas en la literatura en las cuales el ruido participa en la creación de estados ordenados o es responsable de fenómenos sorprendentes que surgen gracias a la no linealidad de los sistemas [60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69]. Recientemente [58] en relación con el sistema espacialmente distribuido con

ruido multiplicativo propuesto en la Ec.(5.1), un fenómeno bastante espectacular fue descubierto. Se demostró que el ruido genera un estado ordenado debido a una transición de fase, que no puede ser observada en ausencia de ruido. Además, esta transición es reentrante: el estado ordenado aparece por encima de un valor crítico de la intensidad de ruido y desaparece para un valor más elevado del mismo.

La existencia de esta transición de fase inducida por ruido puede ser evidenciada analíticamente, siguiendo un procedimiento de campo medio estándar [70]. La aproximación de campo medio consiste en substituir la interacción de los vecinos más cercanos por un término global en la ecuación de Fokker-Planck correspondiente a la Ec.(5.1). Usando esta aproximación, uno determina que las transiciones entre los estados ordenado ($m \neq 0$) y desordenado ($m = 0$) forman fases [59], donde m es el campo medio, definido como $m(t) = \frac{1}{L^d} \sum_{i=1}^{i=N} x_i(t)$. Este análisis muestra que la acción del ruido multiplicativo acoplado conduce a la biestabilidad del medio. Si fijamos la intensidad por encima de su valor crítico, un aumento en el ruido multiplicativo induce una transición de fase desde un estado desordenado hacia uno ordenado, que es posteriormente seguida de una transición desde el orden al desorden [58]. En la fase ordenada, el sistema ocupa uno de los dos estados posibles simétricos con los campos medios $m_1 = -m_2 \neq 0$, dependiendo de las condiciones iniciales. Esta biestabilidad desaparece si eliminamos el ruido multiplicativo.

El mecanismo de este efecto puede ser entendido del modo siguiente. La evolución en el tiempo del primer momento del campo medio viene dada por la ecuación de Fokker-Planck correspondiente (caso Stratonovich)

$$\langle \dot{x}_i \rangle = \langle f(x_i) \rangle + \frac{\sigma_m^2}{2} \langle g(x_i) g'(x_i) \rangle. \quad (5.5)$$

Seguindo la aproximación de evolución de tiempo corto descrita en [71], podemos suponer que comenzamos con una δ de Dirac inicial, que evoluciona durante un tiempo dado, de modo que las fluctuaciones son pequeñas y la densidad de probabilidad puede aproximarse por una Gaussiana. Entonces, la ecuación para el máximo de la probabilidad, que es también el valor medio $\bar{x}_i = \langle x_i \rangle$ en esta aproximación, toma la forma siguiente

$$\dot{\bar{x}}_i = f(\bar{x}_i) + \frac{\sigma_m^2}{2} g(\bar{x}_i) g'(\bar{x}_i), \quad (5.6)$$

que es válida si $f(\langle x_i \rangle) \gg \langle \delta x_i^2 f'' \rangle(\langle x_i \rangle)$. Además, la supresión de fluctuaciones, realizadas por acoplado, hace que esta aproximación sea apropiada a lo largo de la evolución temporal completa [72]. Entonces, podemos escribir también el campo medio

$$\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + \frac{\sigma_m^2}{2} g(\bar{x}) g'(\bar{x}), \quad (5.7)$$

que de nuevo es válida si $f(\langle x \rangle) \gg \langle \delta x^2 f'' \rangle(\langle x \rangle)$ (Note que no siempre esta aproximación explica de manera apropiada la transición de fase, [73]). Para esta dinámica, un potencial eficaz $U_{eff}(x)$ puede ser obtenido, con la forma

$$U_{eff}(x) = U_0(x) + U_{noise} = - \int f(x) dx - \frac{\sigma_m^2 g^2(x)}{4}, \quad (5.8)$$

donde $U_0(x)$ es un potencial monoestable y U_{noise} representa la influencia del ruido multiplicativo. Este potencial eficaz puede proporcionar una justificación conveniente para un fenómeno interesante que emerge en este tipo de estructuras inducidas por ruido. Las secciones siguientes están dedicadas a investigararlo.

5.2 Resonancia vibracional

Uno de los fenómenos más interesantes, que ya ha aparecido en los capítulos precedentes en relación con orden inducido por ruido en sistemas no lineales es el efecto denominado resonancia estocástica. Como ya sabemos, una de las situaciones en las que la resonancia estocástica aparece de modo natural es cuando consideramos ruido aditivo aplicado junto con una perturbación periódica sobre un sistema basado en un potencial bistable. En este caso, la dependencia de la respuesta con la intensidad de ruido tiene una forma resonante, por tanto, puede encontrarse un valor de ruido que produce un procesamiento óptimo de la señal [74, 75]. Este efecto es general y ya ha sido encontrado en muchos sistemas naturales [76]. Entre otros podemos mencionar sistemas con dinámica excitable [77], sistemas sin fuerza externa [78] y sistemas sin umbral [79].

Algunos fenómenos similares a la resonancia estocástica también pueden ser observados en sistemas donde una señal caótica es usada en vez de un ruido [80]. Más aun, se ha demostrado que una fuerza periódica de alta frecuencia puede trabajar como un ruido y amplificar la respuesta a una señal periódica de baja frecuencia en sistemas biestables [81]. A este fenómeno se le ha denominado resonancia vibracional [82], en analogía con la resonancia estocástica.

En la resonancia vibracional, la dependencia de la respuesta del sistema frente a la amplitud de la fuerza de alta frecuencia tiene la conocida forma resonante acampanada. Ya que señales de dos frecuencias son muy a menudo usadas en tecnologías de la comunicación [6], este fenómeno indica que una perturbación óptima de alta frecuencia puede mejorar el tratamiento de una señal de baja frecuencia. Es importante mencionar que señales de dos frecuencias son también objeto de interés en la física de láseres [83], en acústica [84], en neurociencias [85], o en la física de la ionosfera [86]. El objetivo en esta sección es investigar si la resonancia vibracional puede ser alcanzada en estructuras inducidas por ruido, que no tengan ningún umbral ni ninguna barrera de potencial en ausencia del ruido. Con este objetivo, consideramos el sistema extendido presentado en la Ec.(5.1), pero ahora, es añadida una fuerza externa, consistente en una señal de baja frecuencia más una de alta

$$\dot{x}_i = f(x_i) + g(x_i)\xi_i(t) + \frac{D}{2d} \sum_{j \in nn(i)} (x_j - x_i) + A \cos(\omega t) + B \cos(\Omega t), \quad (5.9)$$

donde ω y Ω son las señales de frecuencia baja y alta respectivamente, y A y B sus amplitudes asociadas. Observe que es necesario asumir que $\Omega \gg \omega$ para observar el efecto deseado. En nuestras simulaciones, tomamos los valores $\omega = 0.1$ y $\Omega = 5$. Primero, analizamos el comportamiento del sistema en la región de parámetros en la que el ruido induce una biestabilidad. Fijamos la amplitud de la señal de frecuencia

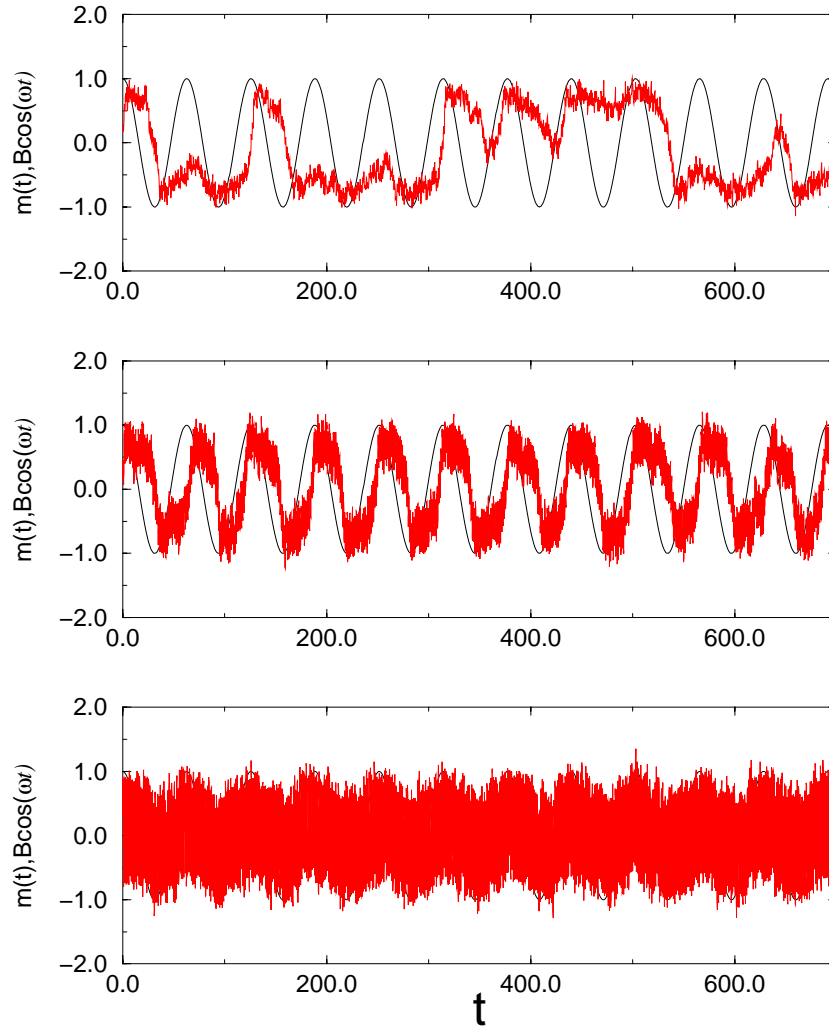


Figura 5.2. Series temporales del campo medio del sistema definido en la Ec.(5.9) comparado con la señal de baja frecuencia $A\cos(\omega t)$ (no en escala) para diferentes intensidades de la vibración de alta frecuencia. De arriba abajo, $B = 0.5$, 1.5 , y 4.0 . $\Omega = 5.0$, $\omega = 0.1$, $A = 0.15$, $\sigma_m^2 = 3.0$. Esta intensidad de ruido multiplicativo corresponde a la región biestable.

baja a un valor suficientemente pequeño (por ejemplo $A = 0.15$), que no es bastante para causar saltos entre los dos estados estables. En esta situación, somos capaces de simular la evolución dinámica del sistema. La serie de tiempos del campo medio $m(t)$ y la señal de entrada correspondiente periódica, para $d = 2$ y $N = 10$, puede ser visualizada en la Fig. 5.2 para tres valores diferentes de B (aumentando de arriba a abajo). Para una amplitud pequeña B , observamos saltos poco probables entre los dos estados simétricos m_1 y m_2 . Si aumentamos B hasta su valor óptimo (en la imagen intermedia), se observa claramente que los saltos ocurren con la misma

periodicidad que la señal de entrada. Por tanto, la modulación de alta frecuencia optimiza el tratamiento de la señal en estructuras inducidas por ruido. Un aumento adicional de B conduce a saltos sincronizados con la oscilación de alta frecuencia, que ocultan completamente la señal de baja. La situación es cualitativamente diferente cuando escogemos una intensidad de ruido multiplicativo que corresponda con la región monoestable. En este caso, un aumento de B conduce sólo a la destrucción de la sincronización entre la entrada y la salida. Por tanto, la modulación de alta frecuencia es incapaz de mejorar la calidad del procesamiento de la señal de baja frecuencia.

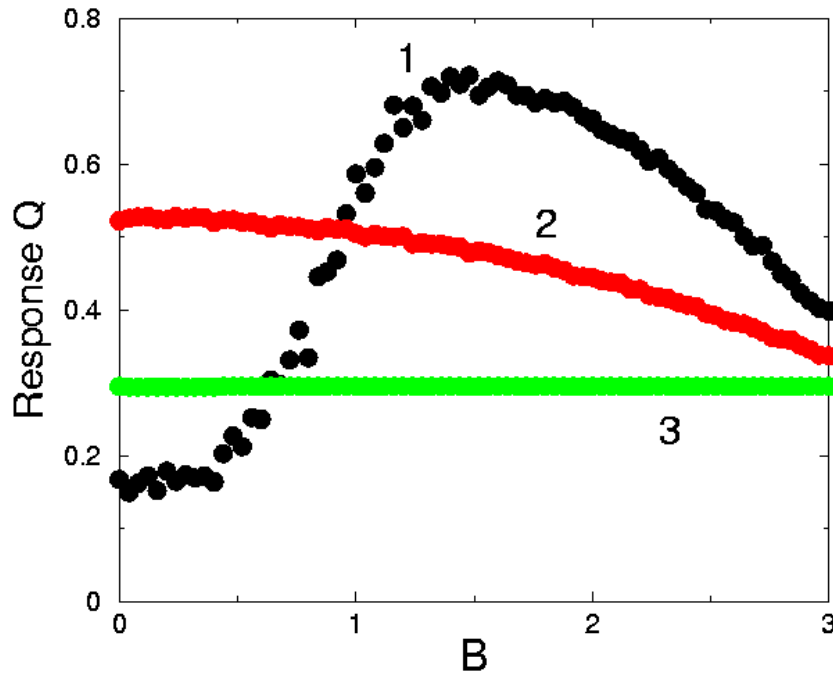


Figura 5.3. Resonancia vibracional en la estructura inducida por ruido. La imagen muestra una simulación numérica para el modelo eficaz donde la respuesta Q del sistema es evaluada como función de la amplitud de la fuerza de alta frecuencia, B . Tres valores diferentes de la intensidad de ruido han sido tenidos en cuenta: $\sigma_m^2 = 3$ (etiqueta 1), $\sigma_m^2 = 0.5$ (etiqueta 2) y $\sigma_m^2 = 0$ (etiqueta 3).

Para caracterizar esta resonancia vibracional cuantitativamente, usamos un parámetro denominado la respuesta del sistema, que por lo general es denotada como Q y que puede ser calculada usando la ecuación siguiente

$$Q = \sqrt{\left(\frac{1}{T} \int_t m(t) \sin(\omega t + \phi) dt\right)^2 + \left(\frac{1}{T} \int_t m(t) \cos(\omega t + \phi) dt\right)^2} \quad (5.10)$$

donde ϕ es la fase de la fuerza de baja frecuencia. En la Fig. 5.3 se muestra el resultado para tres valores diferentes de la intensidad de ruido. En régimen bistable

(etiqueta 1), el sistema presenta un máximo claramente definido para el un valor óptimo B , que atestigua la presencia de resonancia vibracional. Obsérvese que este efecto desaparece si disminuimos (etiqueta 2) o eliminamos (etiqueta 3) el ruido multiplicativo. En estos dos últimos casos, un aumento en la amplitud de la fuerza de alta frecuencia sólo puede conducir a una disminución de la respuesta de sistema.

5.3 Confirmación experimental

La confirmación experimental del efecto de resonancia vibracional en una estructura inducida por ruido es un objetivo complicado. Primero, es necesario desarrollar un conjunto de numerosos osciladores relativamente complejos. Después de esto, es necesario construir un acoplamiento difusivo entre ellos. Finalmente, y más difícil, debemos generar un conjunto elevado de señales de ruido independientes para crear los términos multiplicativos ξ_i . Aunque todas estas tareas pueden ser realizadas, tienen un coste elevado en términos de tiempo, esfuerzo e incluso dinero. Para evitar los problemas que pueden surgir con este acercamiento, nos planteamos un objetivo menos ambicioso. La idea es la de confirmar experimentalmente el fenómeno de la resonancia vibracional, pero a través de la utilización de un modelo eficaz, cuyo comportamiento es equivalente al que de la estructura inducida por ruido en la región biestable. Como muestra la Ec.(5.8), este efecto puede ser comprendido asumiendo un modelo basado en un potencial bistable sobreamortiguado bajo la acción de unas fuerzas periódicas de alta y de baja frecuencia

$$\dot{m} = F(m) + A \cos(\omega t) + B \cos(\Omega t) + \xi(t), \quad (5.11)$$

donde $m(t)$ es el campo medio del sistema y la función $F(x)$ describe un potencial biestable. El término ruidoso $\xi(t)$ modeliza pequeñas fluctuaciones que están presentes en todos los sistemas reales.

Por tanto, para confirmar experimentalmente el fenómeno de la resonancia vibracional, es suficiente con construir un circuito electrónico que ponga en práctica el modelo eficaz descrito por la Ec.(5.11). Esta expresión puede identificarse con la de un doble pozo de potencial forzado por dos señales periódicas

$$\dot{x} = \frac{4h}{L^2}x - \frac{4h}{L^4}x^3 + A \cos(\omega t) + B \cos(\Omega t), \quad (5.12)$$

donde h es la profundidad de los pozos y $2L$ es la separación entre los mínimos. Un dispositivo que ponga en práctica esta clase de ecuación puede ser construido a partir de un lazo de realimentación no lineal como el que se representa en la Fig. 5.4. Este circuito está compuesto de cuatro partes principales, cada una de las cuales tiene una función específica. A continuación, vamos a estudiarlas en profundidad.

La primera parte es la etapa de entrada, que comprende el amplificador operacional $OA3$ y las resistencias R_{e1} , R_{e2} y R_e . Esta actúa como un sumador inversor que a la salida ofrece

$$V_{OA3} = -\frac{R_e}{R_{e1}}V_s - \frac{R_e}{R_{e2}}V_n, \quad (5.13)$$

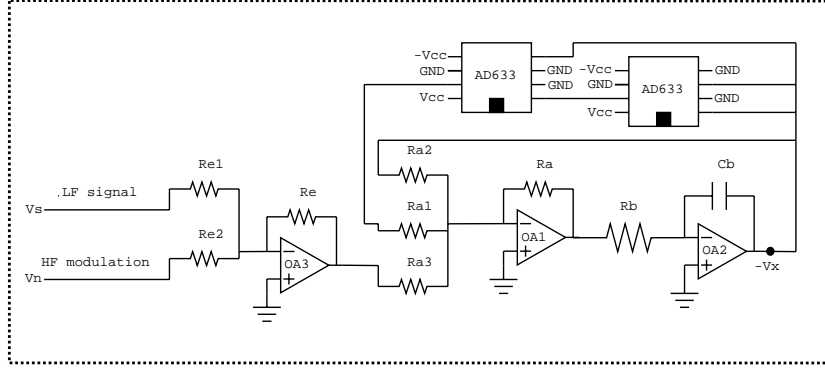


Figura 5.4. La figura muestra el diagrama de un circuito que pone en práctica la Ec.(5.4). Con esta clase de bucle de realimentación no lineal, es posible confirmar experimentalmente el efecto de la resonancia vibracional.

siendo V_s y V_n las fuerzas de baja y alta frecuencia, ambas expresadas como señales en voltaje. La segunda parte es un integrador inversor construido con el amplificador operacional $OA2$, el condensador C_b y la resistencia R_b . Para simplificar, llamamos $-V_x$ al voltaje de salida de $OA2$. Entonces, se puede demostrar que

$$V_x = \frac{1}{R_b C_b} \int V_{OA1} dt, \quad (5.14)$$

donde V_{OA1} es la salida del amplificador operacional $OA1$. La tercera etapa está compuesta de dos multiplicadores analógicos que hemos puesto en práctica utilizando dispositivos de la familia $AD633$, que introducen un factor $\alpha = 0.1$ en el producto. Esta etapa ofrece a la salida

$$V_{AD633} = \alpha^2 V_x^3. \quad (5.15)$$

Finalmente, el cuarto componente es un sumador inversor formado por el amplificador operacional $OA1$ y las resistencias R_{a1} , R_{a2} , R_{a3} y R_a . Su función es la de sumar las señales de entrada con los términos de fuerza apropiados que provienen del gradiente del potencial cuántico. Así, la salida de $OA1$ viene descrita por la expresión siguiente

$$V_{OA1} = \frac{R_a}{R_{a2}} V_x - \alpha^2 \frac{R_a}{R_{a1}} V_x^3 - \frac{R_a}{R_{a3}} V_{OA3}. \quad (5.16)$$

Como la salida de la cuarta etapa está conectada con la entrada del integrador, ambos voltajes deben ser iguales. Entonces, podemos obtener la expresión siguiente

$$\dot{V}_x = \frac{R_a}{R_{a2} R_b C_b} V_x - \alpha^2 \frac{R_a}{R_{a1} R_b C_b} V_x^3 - \frac{R_a}{R_{a3} R_b C_b} V_{OA3}. \quad (5.17)$$

Ahora, podemos fijar las fuerzas de alta y baja frecuencia a unos valores $V_s = A_V \cos(\omega t)$ y $V_n = B_V \cos(\Omega t)$, donde A_V y B_V son las amplitudes en voltaje y ω

y Ω son las frecuencias. Substituyendo, podemos concluir que la ecuación dinámica del circuito es

$$\dot{V}_x = \frac{R_a}{R_{a2}R_bC_b}V_x - \alpha^2 \frac{R_a}{R_{a1}R_bC_b}V_x^3 + \frac{R_a}{R_{a3}R_bC_b} \frac{R_e}{R_{e1}}A_V \cos(\omega t) + \frac{R_a}{R_{a3}R_bC_b} \frac{R_e}{R_{e2}}B_V \cos(\Omega t) \quad (5.18)$$

Comparando la Ec.(5.18) y la Ec.(5.12) es inmediato obtener las expresiones siguientes que relacionan las características del doble pozo y los valores de los diferentes componentes del circuito electrónico

$$\frac{4h}{L^2} = \frac{R_a}{R_{a2}R_bC_b}, \quad (5.19)$$

$$\frac{4h}{L^4} = \frac{\alpha^2 R_a}{R_{a1}R_bC_b}. \quad (5.20)$$

Uniendo la Ec.(5.19) y la Ec.(5.20), es posible obtener las relaciones siguientes, que permiten el cálculo del doble pozo en términos de los valores de los componentes electrónicos que lo constituyen

$$\begin{cases} L = \sqrt{\frac{R_{a1}}{\alpha^2 R_{a2}}} \\ 4h = \frac{R_{a1}R_a}{\alpha^2 R_{a2}^2 R_b C_b} \end{cases} \quad (5.21)$$

Finalmente, es también necesario tener en cuenta la relación entre las amplitudes eficaces de las fuerzas A y B y sus correspondientes señales en voltaje A_V y B_V . Por comparación simple de las Ec.(5.12) y Ec.(5.18) establecemos

$$\begin{cases} A = \frac{R_a R_e}{R_{a3} R_b C_b R_{e1}} A_V \\ B = \frac{R_a R_e}{R_{a3} R_b C_b R_{e2}} B_V. \end{cases} \quad (5.22)$$

Antes de comenzar con el experimento, es necesario seleccionar una región particular de parámetros que permita, al mismo tiempo, que el efecto de resonancia vibracional sea claramente observado y que las características de los componentes electrónicos estén en valores razonables. Después de un análisis teórico y de un conjunto de simulaciones numéricas, decidimos que los valores siguientes eran apropiados $L = 1$, $h = 9$, $\omega = 0.4\pi \text{ rad/s}$, $\Omega = 20\pi \text{ rad/s}$. Para estos valores, cuando la amplitud eficaz $A \approx 5$, las simulaciones muestran que un máximo en Q es producido para una amplitud eficaz $B \approx 40$ de alta frecuencia. Gracias a esta información, es posible calcular los valores de los diferentes componentes del circuito electrónico. Sin embargo, es importante observar que hay un grado de libertad en las ecuaciones que relacionan las características del pozo y los parámetros del circuito. Por esta razón, hay infinitas soluciones posibles, pero debemos tener en cuenta otra restricción antes de escoger de una de ellas: los valores de las resistencias y condensadores disponibles comercialmente están limitados a un conjunto particular. Con toda esta información en mente, es posible encontrar varias soluciones diferentes pero viables. En nuestro caso, adoptamos los valores siguientes para los componentes: $R_{e1} = 6.7K\Omega$,

$R_{e2} = 2.2K\Omega$, $R_e = 2.2K\Omega$, $R_{a1} = 150\Omega$, $R_{a2} = 15K\Omega$, $R_{a3} = 22K\Omega$, $R_a = 56K\Omega$, $R_b = 10K\Omega$ y $C_b = 10\mu F$. Todos los componentes usados en el circuito tienen una tolerancia del 5%.

Con esos valores de los componentes, es posible construir el circuito deseado y comenzar a medir. La estrategia que hemos decidido utilizar para confirmar experimentalmente el efecto de la resonancia vibracional es la de evaluar la respuesta, Q , del circuito como una función de la amplitud eficaz de alta frecuencia, B . Para evaluar Q , simplemente tenemos que medir la respuesta V_x del circuito para cada valor particular de nuestro interés. Entonces, usando la Ec.(5.10), es posible calcular el valor de Q identificando el término $m(t)$ con el estado, V_x , del modelo eficaz. Para el experimento, la amplitud eficaz, A , de baja frecuencia es usada como un parámetro. Esto significa que escogemos un valor particular de A y lo fijamos, entonces, variamos B y medimos la respuesta V_x del circuito en esas condiciones particulares, después, escogemos otro valor de A y repetimos las medidas otra vez. El resultado de aplicar este procedimiento se muestra en la Fig. 5.5. Esta imagen muestra dos familias de curvas. En línea continua sólida tenemos las simulaciones numéricas realizadas sobre el modelo efectivo, en línea discontinua representamos las medidas experimentales. Como puede ser observado, estos resultados confirman experimentalmente el fenómeno de la resonancia vibracional. En todos los valores considerados para el parámetro A , una curva resonante con un máximo claro aparece en algún valor particular de B . Además, las simulaciones numéricas y los resultados experimentales están cerca el uno del otro. Las pequeñas desviaciones que aparecen sobre los máximos son probablemente debidas a la tolerancia de los componentes.

5.4 Conclusión

En este capítulo, hemos descrito un fenómeno que consiste en la existencia de resonancia vibracional en una estructura inducida por ruido. Este efecto es la síntesis de una transición de fase inducida por ruido y la resonancia vibracional, en la que una fuerza de alta frecuencia es capaz de optimizar el tratamiento de una señal de frecuencia baja. Gracias a las simulaciones numéricas, hemos visto que el efecto de la resonancia vibracional se produce realmente por la acción del ruido multiplicativo, y desaparece cuando este se hace demasiado bajo o demasiado alto.

También hemos mostrado que, para el valor apropiado de la intensidad de ruido multiplicativo, es posible definir un modelo efectivo para el campo medio completamente basado en el comportamiento dinámico de un doble pozo de potencial. Hemos desarrollado un circuito electrónico que implementa este doble pozo de potencial y hemos verificado experimentalmente, el efecto de resonancia vibracional. Hemos comparado los resultados experimentales con las simulaciones realizadas sobre el modelo efectivo, concluyendo que las diferencias que aparecen entre ellos están dentro de los errores debidos a la tolerancia de los componentes electrónicos. Este es ciertamente un logro notable porque es la primera confirmación experimental de un fenómeno de resonancia vibracional que ha sido reportada en la literatura científica.

Finalmente, es importante comentar que el trabajo propuesto en este capítulo no

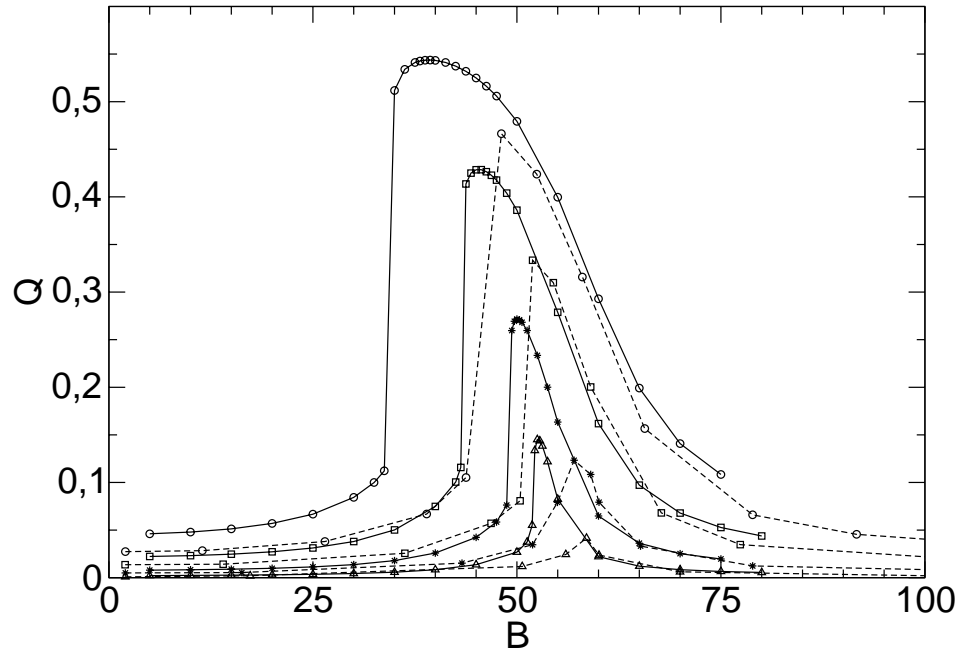


Figura 5.5. Valores numéricos y experimentales de la respuesta del sistema frente a la amplitud eficaz de alta frecuencia, B . Las líneas continuas corresponden a valores numéricos mientras que las discontinuas indican resultados experimentales. Los diferentes símbolos responden a valores diferentes de la amplitud eficaz de la señal de baja frecuencia: Círculos = 6.656, cuadrados = 3.328, estrellas = 1.248 y triángulos = 0.416.

está cerrado. La confirmación experimental del efecto de la resonancia vibracional usando directamente una estructura inducida por ruido podría ser muy interesante y de gran interés para la comprensión de este fenómeno. En esta dirección, sería importante confirmar experimentalmente la presencia de resonancia vibracional en otras disciplinas científicas y tecnológicas. Esto podría conducir al desarrollo de nuevas aplicaciones basadas en este efecto.

Capítulo 6

Retículas celulares y sus aplicaciones

6.1 Introducción

En este capítulo, consideramos una familia de sistemas similares a los presentados en el Capítulo 5. En ambos casos, los modelos propuestos están compuestos de un conjunto de múltiples elementos simples, que interactúan siguiendo una topología regular. Sin embargo, en este caso el objetivo no es el de presentar o analizar un fenómeno novedoso, sino el de ilustrar que es posible realizar un procesamiento complejo de la información basado en una topología de interconexión regular. En este sentido, es importante comentar que los modelos propuestos en este capítulo no son nuevos, sino que han sido estudiados en diferentes disciplinas científicas en los últimos años. En cualquier caso, los conceptos presentados en este capítulo son importantes para la coherencia global de la tesis, y por esta razón forman parte de la misma.

El capítulo está organizado del modo siguiente. En primer lugar, presentamos algunos modelos simples basados en retículas celulares y mostramos que estas son convenientes para realizar un procesamiento complejo de la información dentro del ámbito del tratamiento de imágenes. Después, seguimos un acercamiento similar, pero utilizando una retícula de neuronas integrate-and-fire acopladas. Finalmente, se extraen algunas conclusiones.

6.2 Retículas de autómatas celulares

Los autómatas celulares son una de las primeras tentativas de investigar cómo el comportamiento complejo surge de componentes simples. Como su nombre sugiere, esta clase de sistemas está inspirada en la biología, donde es común que un conjunto de entidades simples, denominadas células, actúen juntas formando un todo más complejo como un tejido, un órgano, e incluso un animal completo. Los autómatas celulares utilizados en informática son, por lo general, menos sofisticados que las verdaderas estructuras biológicas y, sin embargo, ya han ofrecido grandes avances en la comprensión de las leyes universales que describen la complejidad.

Básicamente, un autómata celular está compuesto de dos ingredientes: un conjunto de elementos simples idénticos llamados células y una topología de interco-

nexión que define las interacciones entre estas células. Las células, por lo general, se comportan mecánicamente siguiendo un conjunto de reglas predefinidas, que son denominadas el programa. La evolución de cada célula viene determinada a través de un estado, que es una variable cuyo valor depende de la historia de la célula y del estado de su vecindad. La vecindad de una célula es el conjunto de otras células que interactúan con ella. Este factor esencial depende claramente de la topología de interconexión considerada. Por lo general, se considera que las células están unidas a través de retículas regulares, caso en el cual la vecindad es el conjunto de células físicamente más cercanas a la célula en cuestión. La evolución de un autómata se evalúa utilizando un tiempo discretizado. En cada iteración, el siguiente estado de una célula es calculado a través del programa, que puede ser una función del estado precedente. Después de esto, todos los estados son actualizados y el sistema está listo para la iteración siguiente.

Uno de los ejemplos más famosos de autómata celular es el Juego de la Vida, inventado por el matemático de Cambridge John Conway. Este es una analogía simple en 2D de procesos básicos que tienen lugar en sistemas vivos. El juego consiste en modelizar la evolución de un conjunto de células dispuestas en una rejilla de dos dimensiones. Cualquier célula en la rejilla puede estar en uno de dos estados posibles: *viva* o *muerta*. El estado de cada célula cambia de una generación a la siguiente dependiendo del estado de sus vecinos inmediatos. Las reglas que gobiernan estos cambios han sido concebidas con el fin de imitar el cambio demográfico:

- Una célula viva con sólo 0 o 1 vecinos vivos muere de aislamiento.
- Una célula viva con 4 o más vecinos vivos muere el hacinamiento.
- Una célula muerta con exactamente 3 vecinos vivos se convierte en viva
- Todas las otras células permanecen inalteradas.

Aunque la evolución de cada célula venga definida de un modo bastante simple, el comportamiento del conjunto reproduce los rasgos complejos de los sistemas vivos como la formación de patrones y la autoorganización.

Los autómatas celulares no son sólo interesantes porque emulen el comportamiento biológico, varios de sus tipos, incluyendo el Juego de la Vida, son capaces de actuar como un computador universal. En términos matemáticos, esto significa que son equivalentes a una máquina de Turing universal. Desde un punto de vista práctico esta propiedad implica que son capaces de realizar cualquier tarea que pueda hacer un ordenador. Por definición, cualquier computador universal, en principio, puede ser simulado por cualquier otro computador universal, simplemente emulando las operaciones elementales del primer computador universal con las operaciones del segundo. El hecho que los autómatas celulares sean computadores universales justifica que su comportamiento, en general, no pueda ser predicho por ningún otro procedimiento equivalente a simularlo. Esto justifica la necesidad de introducir modelos computacionales de esta clase de sistemas como el único modo viable para estudiar sus propiedades.

6.3 Detección de bordes

La idea en esta sección es muy simple, queremos demostrar que a través de una rejilla de autómatas celulares simples es posible realizar una tarea importante en el procesamiento de imágenes: la detección de bordes. Para simplificar, asumimos que la imagen a procesar viene codificada en una escala de grises normalizada. Así, cada pixel está descrito por un valor de luminancia en el intervalo $[0, 1]$. A continuación, podemos definir una retícula celular que tiene el mismo tamaño que la imagen, de modo que para cada uno de sus pixels existe una célula asociada. El comportamiento de la célula viene descrito en términos de dos parámetros, que llamamos la entrada de la célula y la respuesta de la célula. La entrada de la célula es simplemente el valor de la luminancia del pixel asociado. La respuesta de la célula, que puede ser vista como una variable de estado (sin memoria), es calculada como una función de las entradas de los vecinos de cada célula. La regla para calcularla en una célula i puede ser descrita de manera siguiente

$$y_i = \sum_{j \in N_{act}(i)} x_j - \sum_{j \in N_{inh}(i)} x_j, \quad (6.1)$$

donde y_i es la respuesta de la célula i , x_j es la entrada de la célula j , $N_{act}(i)$ es el conjunto de vecinos activadores de i y $N_{inh}(i)$ es el conjunto de vecinos inhibidores de i . Es evidente que los vecinos activadores de una célula tienden a aumentar su respuesta mientras que los vecinos inhibidores tienden a reducirla. Este mecanismo de activación-inhibición está inspirado en el funcionamiento de los sistemas biológicos de visión, donde las células ganglionales de la retina están organizadas formando regiones de inhibición-activación que forman círculos concéntricos [87].

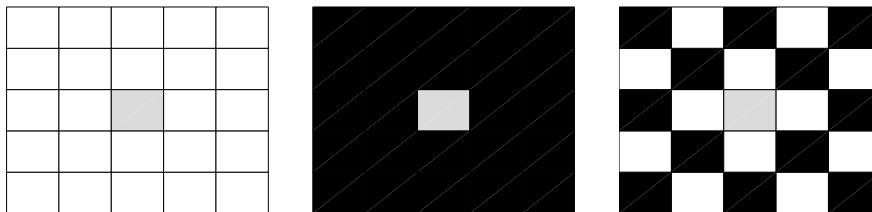


Figura 6.1. La figura muestra tres máscaras de imagen. Todas ellas son cuadradas y tienen un borde de 5 células de longitud. Cada color indica un papel desempeñado diferente. En gris tenemos la célula que está siendo analizada que ocupa la posición media, el resto son sus vecinas. Las células de activación están representadas en blanco, las de inhibición en negro. La imagen de la izquierda muestra una máscara de activación completa donde todos los vecinos realzan la respuesta de la célula analizada. En el centro, un esquema de inhibición completo puede ser observado. Finalmente, la figura de la derecha muestra una máscara mixta, donde ambos tipos de vecinos están presentes.

Una vez que hemos definido la respuesta de una célula, la siguiente tarea es la de determinar la topología de interconexión. Con este objetivo, es necesario definir

cuáles son los vecinos de cada célula y, entre estos vecinos, cuáles activan y cuáles inhiben. Para entender este aspecto de manera intuitiva, vamos a usar el concepto de máscara. Una máscara por lo general es definida como un patrón. Cuando el centro de la máscara está sobre la célula i , decimos que todas las células cubiertas por la máscara son los vecinos de i . Como tenemos dos tipos de vecinos en nuestra retícula, vamos a definir dos clases de colores para nuestra máscara. Por ejemplo, una célula cubierta por una parte blanca de la máscara será considerada como un vecino activador, mientras que será inhibidor cuando esté cubierto por un fragmento negro. Hay muchas clases diferentes de máscaras que podemos considerar, sin embargo, por simplicidad, asumimos una forma cuadrada para ellas. Además, para evitar la necesidad de simulaciones computacionales demasiado pesadas, aceptamos que estas máscaras son relativamente pequeñas, limitando el borde del cuadrado a un tamaño de 5 células. Considerando estas restricciones, tal y como puede ser observado en la Fig. 6.1, cada célula tiene 24 vecinos (las 25 posiciones de la máscara excepto su propia posición). Además, para cada vecino hay sólo dos posibilidades: estar cubierto por una sección blanca o negra.

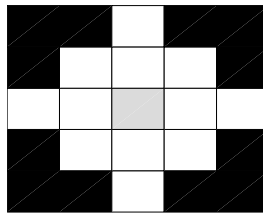


Figura 6.2. *Esta clase de máscara realiza la respuesta de las células que pertenezcan a un borde. Esta propiedad es debida a que sólo los pixeles que tengan alta luminancia y luminancia baja en los vecinos externos, son activados. Además, como puede ser observado, la activación horizontal y vertical es mejorada con esta clase particular de modelo.*

Una vez que hemos aplicado la máscara, dejamos que las células evolucionen y obtengan sus respectivas respuestas. Cuando este proceso ha finalizado, el procesamiento de la imagen puede darse por concluido. Para recuperar los resultados, tomamos todas las respuestas de las células y representamos sus valores sobre una nueva imagen, cuyos pixeles toman una luminancia normalizada l_i definida por la ecuación siguiente

$$l_i = \begin{cases} \frac{y_i}{y_{max}} & \text{if } y_i > 0 \\ 0 & \text{if } y_i \leq 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

donde y_i es la respuesta de la célula correspondiente e y_{max} es el máximo de todas las respuestas.

Utilizando estos conceptos, somos capaces de lograr nuestro objetivo de encontrar una máscara útil para la detección de bordes. Considerando las limitaciones impuestas previamente, el número total de máscaras que podemos definir es igual a 2^{24} , cada una de las cuales tiene sus propias propiedades. Por suerte, no es necesario

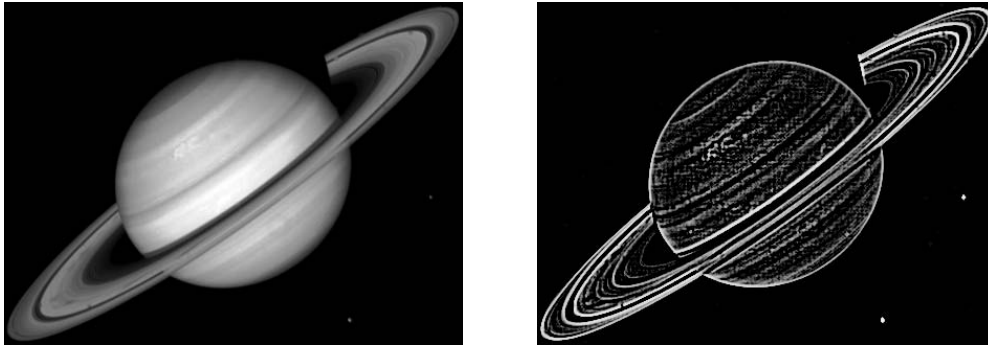


Figura 6.3. *La figura de la izquierda muestra la imagen original. A la derecha se muestra el resultado de procesar esta imagen a través de la máscara de detección de bordes presentada en la Fig. 6.2. Como puede ser observado, todos los bordes son extraídos de la imagen original. La respuesta de las células que pertenecen a bordes horizontales y verticales es considerablemente aumentada gracias al particular diseño simétrico de la máscara.*

explorar todas ellas para encontrar la apropiada. De hecho es bastante fácil entender que una máscara como la dada en la Fig. 6.2 es suficiente. Como puede observarse, esta forma particular beneficia la respuesta de células asociadas a pixeles que tengan una elevada luminancia, pero con vecinos externos débiles. Además, su distribución realza las líneas horizontales y verticales, que son las más comunes en la mayoría de imágenes. Los resultados de aplicar tal máscara sobre una imagen particular son representados en la Fig. 6.3. Como puede ser observado, la imagen original es transformada en una nueva imagen donde los bordes que separan las diferentes regiones son claramente realzados.

Es también interesante comentar que esta clase de tratamiento permite nuevas operaciones sobre las imágenes. Por poner un ejemplo simple, podemos observar qué sucede cuando una máscara asimétrica como la de la Fig. 6.4 es aplicada. Como puede observarse, es posible seleccionar la orientación y la posición relativa de los bordes a realzar. En este caso, haciendo que la parte derecha de la máscara sea más inhibitoria, el procesamiento permite extraer sólo los bordes derechos de los objetos en la imagen.

Aunque no dudamos de que los autómatas celulares podrían ser útiles para el procesamiento de imágenes, es importante comentar que los resultados presentados en esta sección también pueden ser comprendidos en el contexto de la morfología matemática [88], que es probablemente un marco más apropiado para esta clase de aplicaciones. En este sentido, queremos volver a destacar que el objetivo de esta sección no es el de definir una nueva técnica de detección de bordes que pueda competir con los algoritmos preexistentes. Nuestro deseo es simplemente evidenciar la aparición de procesamiento complejo cuando aparecen interacciones entre múltiples subsistemas simples. El hecho de utilizar una topología de interconexión regular per-

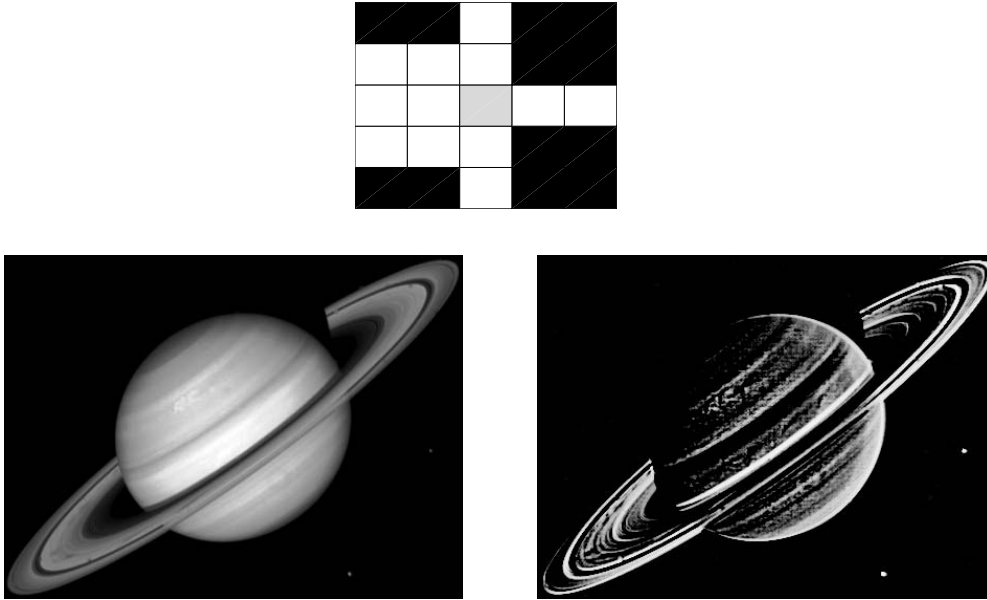


Figura 6.4. *La figura de a la izquierda muestra la imagen original. A la derecha tenemos el resultado de procesar esta imagen con la máscara realzadora de bordes presentada en la parte superior. Como puede ser observado, gracias a la máscara asimétrica usada, los bordes derechos de los objetos son realzados mientras las células sobre los izquierdos no presentan una respuesta significativa.*

mite sólo la extracción de propiedades locales (los bordes son propiedades locales de las imágenes porque están definidos por los vecinos cercanos). Para un procesamiento de información más general sería necesario considerar topologías más complejas o autómatas más sofisticados que permitan a una propagación más extensa de la información.

6.4 Retículas de neuronas acopladas mediante pulsos

Las redes neuronales son uno de los temas que están alcanzando mayor popularidad y atención dentro de la comunidad científica en los últimos años. En muchos aspectos, las redes neuronales son similares a los autómatas celulares: ambos están inspirados en principios biológicos y ambos se constituyen de componentes simples que interactúan entre sí. La diferencia principal entre ambos viene del hecho de que las redes neuronales tratan de emular neuronas biológicas reales mientras que los autómatas celulares permiten mayor libertad a la hora de escoger el comportamiento de las células. En una perspectiva puramente teórica, podemos decir que las redes neuronales pueden ser vistas como un tipo particular de autómatas celulares. En la práctica, ambas disciplinas tienen metodologías y objetivos diferentes.

Hay numerosos tipos de redes neuronales dependiendo del tipo de neurona y sobre todo del tipo de topología de interconexión considerada. En este capítulo estamos

principalmente interesados en una clase particular de ellas que son las denominadas redes neuronales acopladas mediante pulsos (Pulse Coupled Neural Networks - PCNN). Las PCNN heredan algunas características de las redes neuronales tradicionales, pero consideran una nueva familia de modelos dinámicos de neuronas que, se supone, están más próximas al verdadero comportamiento de las neuronas biológicas. Hay varios modelos diferentes que pueden ser usados en la simulación de PCNN pero los más populares son los modelos *integrate-and-fire* (consultar el Capítulo 4) En principio, no hay ninguna restricción para la topología de interconexión de la red de interacción. Sin embargo, vamos a asumir la más simple de ellas: la retícula regular. Por esta razón, preferimos hablar de retículas de neuronas y no de redes de neuronas.

6.5 Sincronización y detección de regiones

Una de las tareas más comúnmente realizadas en el procesamiento de imágenes es la de aislar las diferentes regiones que las componen. Este tipo de tarea es de gran interés cuando, por ejemplo, es necesario extraer el iris o la región de la pupila de la imagen de un ojo. Esta puede ser llevada a cabo de manera eficiente usando las técnicas de procesamiento de imágenes tradicionales. En este sentido, nuestro interés no es el de proponer un nuevo método que mejore estas técnicas, sino el de mostrar las capacidades de las redes regulares para procesar información.

La idea es simple, tomamos un modelo de neurona convencional *integrate-and-fire* en la que la dinámica neuronal está definida por un conjunto de parámetros a_i , b_i . Entonces, definimos una retícula 2D de tamaño finito y localizamos una neurona sobre cada punto de la retícula. Asumimos que cada neurona está conectada a sus 4 vecinos más cercanos (el de arriba, el de abajo, el de la derecha y el de la izquierda). Como la retícula es finita, las neuronas que pertenecen a los bordes tienen menos de 4 vecinos, razón por la que presentan menos sinapsis. Esta topología de conexión define la interacción entre las neuronas a través de la ecuación

$$\dot{u}_i = a_i - b_i u_i + \sum_{j \in nn(i)} w_{ij} u_j \quad (6.3)$$

donde u_i es la activación de la neurona i , $nn(i)$ son los 4 vecinos más cercanos de la neurona i y w_{ij} son los pesos de las sinapsis. Por simplicidad, asumimos que w_{ij} es constante en todas las conexiones.

Esta retícula de neuronas puede ser usada para el procesamiento de imágenes. Para ello, es necesario representar, de algún modo, la información de los píxeles de la imagen. Para lograrlo hemos escogido un método que consta de dos pasos.

- Primero, identificamos cada pixel de la imagen con una neurona particular de la retícula. Es necesario que la retícula y la figura tengan el mismo tamaño. Por tanto una imagen de $N \times M$ píxeles estará asociada con una retícula de $N \times M$ neuronas.

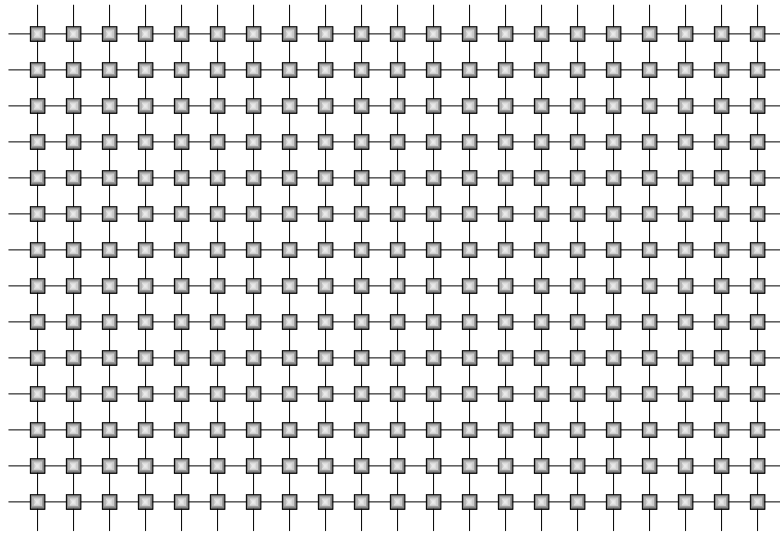


Figura 6.5. *La topología de interconexión de la red neuronal propuesta está basada en una retícula regular de 2D de grado $c = 4$ (cada neurona tiene 4 vecinos). El tamaño de la retícula es igual al tamaño de la imagen que deseamos tratar.*

- A continuación, la dinámica de cada neurona será modificada a partir de las propiedades particulares de la imagen. Las imágenes deben estar codificadas en una escala de grises normalizada. Así, la luminancia de cada pixel es un número entre 0, para negro, y 1 para blanco. En este punto, podemos imponer que el parámetro de activación a_i de cada neurona sea igual a la luminancia normalizada del pixel correspondiente asociado a la misma.

Después de esto, dejamos que la retícula evolucione en el tiempo siguiendo las ecuaciones del modelo integrate-and-fire. Considerando que fijamos el umbral de disparo u_{th} en un valor fijo de 1, está claro que el potencial de membrana u_i está siempre en el intervalo $[0, 1]$ y puede ser interpretado como una fase normalizada [89]. Nuestro objetivo es investigar la sincronización de fase que ocurre en la rejilla según el valor de los parámetros. Un conjunto de simulaciones computacionales han demostrado que existe una región intermedia de pesos sinápticos en los que las neuronas que pertenecen a un componente conexo de la imagen están sincronizadas. Un ejemplo sencillo se muestra en la Fig. 6.6. La imagen original está representada en la esquina superior izquierda, la evolución en el tiempo va de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo. Como puede ser observado, al principio, la activación es completamente arbitraria. A medida que el sistema evoluciona, aparece una sincronización de las neuronas que pertenecen a la misma región.

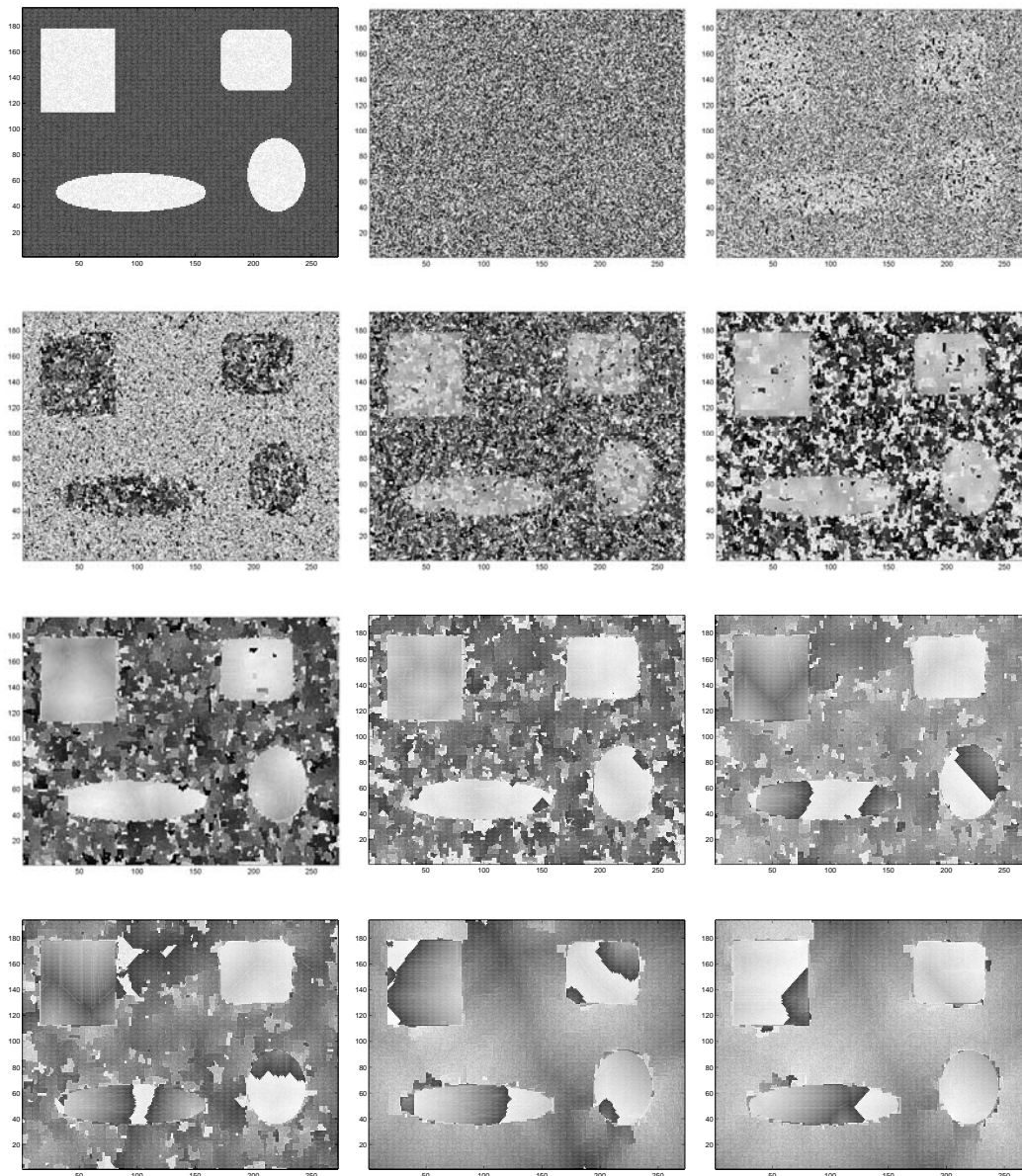


Figura 6.6. La figura muestra la evolución dinámica de una red de neuronas acopladas mediante pulsos donde la activación a_i de las células es controlada por la intensidad luminosa de los píxeles que pertenecen a una imagen. Sobre la esquina superior izquierda se muestra la imagen original. El tiempo evoluciona de izquierda a derecha y de arriba abajo. Como puede ser observado, en algunos instantes particulares, las neuronas que pertenecen a una misma región conexa están sincronizadas. Este mecanismo podría permitir la detección y la extracción de objetos en imágenes. Los parámetros de simulación son los siguientes: $w = 0.1$, $b_i = 0.9$, $\tau = 0.1$ y $u_{th} = 1$.

6.6 Conclusión

Aunque los resultados presentados en este capítulo sean sugerentes, es importante comentar que no tienen ninguna aplicación práctica realista. Los algoritmos propuestos son demasiado lentos para ser útiles y no pueden competir con las técnicas convencionales usadas tradicionalmente en el procesamiento de imágenes. Además, esta discusión no define una metodología exhaustiva y deja demasiados puntos por resolver. Sin embargo, es importante hacer notar que nuestro objetivo aquí es solamente el de mostrar que la interacción entre componentes similares simples puede conducir al comportamiento global complejo.

Incluso una topología de interconexión simple como una rejilla regular de 2D puede producir, en sistemas dinámicos modelados por neuronas, efectos complejos como la sincronización selectiva. Esta clase de interacción entre vecinos próximos puede ser responsable de muchos comportamientos relevantes en sistemas biológicos, pero no es suficiente cuando tratamos de explicar comportamientos más complejos. En este caso, la estructura de la red de interacción puede tener una gran importancia en el funcionamiento final del sistema. Los capítulos siguientes están dedicados al estudiar en más profundidad estos aspectos esenciales.

Parte III

Modelos en lo complejo

Capítulo 7

Flujo de información en redes sociales

7.1 Introducción

La parte de la tesis titulada *Modelos en la frontera* trata aspectos relativos a los sistemas que pueden ser modelizados con un nivel de detalle suficiente como para ser capaces de realizar predicciones exactas considerando los diferentes efectos que tienen lugar en un escenario realista. Como puede observarse, estos modelos se basan en sistemas constituidos como la unión de múltiples componentes, pero en los que las interacciones ocurren siguiendo una topología regular. Por este motivo, en términos de contenido algorítmico de información, estos sistemas pueden ser considerados simples.

En esta nueva parte, donde tratamos con modelos complejos, damos un paso significativo y comenzamos a considerar sistemas que tienen una estructura complicada, sobre todo en lo relativo a la descripción de las interacciones entre sus diferentes elementos. De este modo, entramos en el mundo de la ciencia de las redes complejas. El estudio y la caracterización de sistemas complejos a través del empleo de redes es un área de investigación con una importante actividad en la actualidad, en la que existen multitud de problemas interesantes abiertos. En este campo, la teoría de grafos y el análisis de redes juegan un papel destacado y por este motivo están ganando una gran popularidad debido a su capacidad para reducir un sistema a sus componentes y relaciones simples. Es quizás este poder reduccionista el que permite a la caracterización de redes estar presente en diferentes disciplinas científicas y tecnológicas como la neurobiología [90, 91, 92, 93], Internet [94], el WWW [95, 96], la economía [97], etc. Además, muchos físicos han concentrado sus intereses de investigación en las redes complejas, tal y como puede ser notado por el número de artículos que han aparecido en la literatura [98, 99, 100, 101, 102, 103] en los últimos años. La mayor parte de los esfuerzos recientes realizados en relación con las redes complejas han sido sintetizados en el excelente artículo [104].

Entre las redes complejas, las redes sociales aparecen de un modo natural, y como en cualquier otro sistema complejo, pueden ser analizadas en el marco de la teoría de grafos [101, 105]. Un grafo G consiste en un conjunto no vacío de elementos, denominados vértices, y en una lista de pares no ordenados de estos elementos,

denominados aristas. Si i y j son vértices de G , entonces se dice que una arista de la forma (i, j) , une i con j . Muchos sistemas complejos interesantes están contruidos de componentes simples que mantienen relaciones entre sí. La representación de estos sistemas a través de un grafo es directa, simplemente considerando que cada componente simple es un vértice y que cada relación es una arista.

Cualquier estructura social está compuesta de diferentes tipos de elementos como seres humanos, grupos de personas, naciones, etc., que están enlazados siguiendo un conjunto de reglas que definen la existencia y el grado de sus relaciones. Un ejemplo muy conocido de red social es el Juego de Kevin Bacon desarrollado por Brett Tjaden y estudiado por Watts y Strogatz [106] en el contexto del fenómeno *small world*. En este modelo, cada actor o actriz se considera como un vértice de un grafo, dos vértices están conectados a través de una arista sólo si ambos han participado en una misma película. Otro ejemplo interesante fue desarrollado por Newman [101] estudiando las redes de colaboración científica. En este caso, cada vértice del grafo representa un autor científico particular, dos autores están unidos cuando han participado al menos en un mismo artículo juntos. Otros ejemplos están relacionados con la red de contactos sexuales humanos [108] y con el fenómeno *small world* [109, 110].

Por tanto, usando solamente dos ingredientes: los elementos, representados por los vértices, y las relaciones, representadas por las aristas, es posible definir cualquier clase de estructura social. En este capítulo estamos especialmente interesados en el estudio de las redes de colaboración que surgen en comunidades u organizaciones humanas. En este sentido, representamos cualquier red social como un grafo simple en el que cada persona es un vértice y las relaciones son las aristas. Para simplificar, asumimos algunas restricciones de las impuestas por Watts en su estudio sobre el fenómeno *small world* [106]. En particular, las aristas utilizadas en nuestro modelo son

- Aristas no dirigidas, lo que implica que consideramos relaciones simétricas.
- Aristas no ponderadas, lo que implica que las aristas no tienen asignado ningún peso.
- Aristas simples, lo que indica que no están permitidas aristas que unan un vértice consigo mismo ni múltiples aristas entre el mismo par de vértices.

Empleando estas técnicas, nuestro objetivo en este capítulo es desarrollar un modelo para el flujo de información en redes sociales. Usando este modelo, deseamos analizar cómo la topología de una red está relacionada con la eficiencia de grupos y comunidades sociales. En esta dirección, nuestro interés está especialmente concentrado en el estudio de redes jerárquicas, porque son las más populares, estando presentes en todo tipo de organizaciones tales como empresas comerciales, gobiernos, el ejército, etc.

7.2 Un modelo de flujo de información en la sociedad

Tradicionalmente, la investigación en teoría de grafos se ha concentrado en analizar cómo la información se propaga de un vértice al resto, pero considerando que la información puede viajar por las aristas sin sufrir ninguna clase de proceso de degradación. Este acercamiento se ha mostrado útil a la hora de modelizar algunos fenómenos como la propagación de enfermedades en una comunidad social [111, 112, 113] o la infección de virus y la propagación de errores en redes de ordenadores [114]. Sin embargo, vamos a ver que esta visión no es apropiada para la propagación de información en redes sociales.

Las redes sociales pueden ser de naturalezas muy diferentes (una organización, una empresa, una asociación, una congregación religiosa, etc.). Nuestro interés está concentrado en comunidades en las que las relaciones se establecen a través del intercambio de cierta *información*. En este contexto, el término información debe ser entendido en sentido amplio. Por ejemplo, en algunas comunidades sociales basadas en la amistad, las personas pueden ayudarse el uno al otro; entonces, la información puede tomar la forma de esfuerzo, tiempo, dinero, etc. En las empresas, se puede considerar que las relaciones tienen un componente profesional muy importante, por tanto la información puede materializarse en múltiples formas diferentes.

La experiencia muestra que la información obtenida de una persona depende en gran medida del grado de relación que se mantiene con ese individuo particular. Como queremos representar las relaciones sociales a través de aristas no ponderadas y no dirigidas, definimos el grado de relación entre dos personas como la distancia, en número de saltos, desde el vértice que representa a una de ellas hasta el que representa a la otra. Así, si estamos relacionados en primer orden con una persona particular, podremos fácilmente obtener mucha información de ella. Si pensamos en una relación de segundo orden, por ejemplo un amigo de uno de nuestros amigos, la cantidad de información que podemos recibir es inferior que para uno de nuestros amigos más cercanos y así sucesivamente.

Con el objetivo de crear un modelo apropiado de esta situación, definimos una cantidad que llamamos el *grado de coordinación*. El grado de coordinación mide la capacidad de los vértices en un grafo para intercambiar información. Hay varios métodos a través de los cuales podemos modelizar esta magnitud. Uno de los más sencillos es el de considerar que el grado de coordinación está exponencialmente relacionado con la distancia entre los vértices. De este modo, definimos el grado de coordinación γ_{ij} entre dos vértices i y j como

$$\gamma_{ij} = e^{-\xi d_{ij}}, \quad (7.1)$$

donde d_{ij} es la distancia entre los dos vértices y ξ es una constante positiva, que mide la fuerza de la relación y que vamos a llamar la *fuerza de coordinación*. Es importante comentar que es posible considerar una fuerza de coordinación diferente para cada arista del grafo, pero esto conduciría a grafos ponderados, que no consideramos aquí. Por tanto, como una primera aproximación, ξ es considerada constante para cada grafo particular.

Magnitudes similares al grado de coordinación ya han sido presentadas en la literatura. El trabajo más notable en este campo es el realizado por Katz [115], donde el autor considera la suma de $e^{-\xi d_{ij}}$ a través de todos los caminos a un vértice particular. Esta clase de acercamiento está basado en que la información puede viajar siguiendo todos los caminos posibles. Frente a esta situación, nuestro modelo postula que la información sólo viaja siguiendo el camino más corto entre dos vértices. En realidad, podría demostrarse que el verdadero comportamiento de la información en las redes sociales se sitúa en algún punto entre esos dos extremos: es decir, tiene tendencia de seguir caminos tan cortos como sea posible, pero eventualmente, puede viajar a través de rutas más intrincadas. En esta dirección, pensamos que nuestro modelo es más apropiado que el propuesto por Katz por varios motivos. Primero, la medida de Katz sólo puede ser expresada en términos de la matriz de adyacencias del grafo, haciendo que el análisis y las simulaciones sean mucho más complejos. Segundo, el hecho que todos los caminos tengan la misma prioridad para la propagación de información produce ciertas inconsistencias en los resultados, principalmente cuando se consideran lazos cerrados, donde la información, de algún modo, puede ser amplificada usando este tipo de modelo. Frente a esto, el grado de coordinación puede ser fácilmente evaluado y puede ser considerado como una buena aproximación en grafos de baja densidad, simplemente asumiendo que la información que viaja por rutas secundarias es despreciable.

Aceptando estas suposiciones, podemos definir el *grado de coordinación total* de un vértice i de un grafo como la suma de todos los grados de coordinación entre ese vértice particular y el resto

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}, \quad (7.2)$$

donde N es el orden del grafo (el número total de vértices en ese grafo). Es interesante comentar que esta definición incluye el grado de coordinación de un nodo consigo mismo. Usando la Ec.(7.1) el grado de coordinación de un nodo consigo mismo debe ser igual a uno, porque la distancia d_{ii} del nodo a sí mismo es cero, y por consiguiente $\gamma_{ii} = e^{-\xi d_{ii}} = e^0 = 1$. El grado de coordinación total de un vértice es una medida de la cantidad de información que el vértice es capaz de recibir por pertenecer a esa red particular.

De la misma manera, definimos el *grado de coordinación total* del grafo como la suma de los grados de coordinación totales de todos los vértices que pertenecen a ese grafo

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i. \quad (7.3)$$

El grado de coordinación total de un grafo es una medida de la cantidad de información que fluye en una organización. Más interesante que el grado de coordinación total del grafo es el *grado de coordinación medio* del grafo, que definimos como el

grado de coordinación total dividido por su orden

$$\bar{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{N}. \quad (7.4)$$

Esto nos permite dar una interpretación interesante del grado de coordinación medio de un grafo como una medida de la eficiencia de una comunidad u organización, porque sugiere con cuanta información el individuo contribuye a la comunidad.

Un ingrediente básico de nuestro modelo es que el número de relaciones que una persona puede mantener dentro de una comunidad está necesariamente limitado. Por ejemplo, si pensamos en nuestro círculo de amigos podemos ver que el número de personas con la que nos sentimos realmente conectados no es normalmente superior a 5 o 6. Una conclusión similar podría ser obtenida en nuestros lugares de trabajo; el número de personas con las que podemos considerar que estamos realmente coordinados no es, por lo general, superior a la media docena. Esto podría ser la consecuencia del hecho de que establecer relaciones con los demás normalmente consume tiempo, y el tiempo es un recurso limitado.

7.3 Estructura y eficiencia en organizaciones

Una vez que hemos definido el grado de coordinación medio, sería interesante investigar como la estructura y el tamaño de las organizaciones están relacionados. Como el número de familias de grafos es muy elevado, debemos realizar algunas restricciones para ser capaces de realizar un análisis exhaustivo sobre las más características. La primera condición que podría ser impuesta está relacionada con el valor medio del número de relaciones que una persona puede mantener, en otras palabras, el número medio de aristas que comienzan en un vértice particular. Por lo general, a este parámetro se le denomina el grado medio del grafo. Siguiendo la notación habitual, representamos esta magnitud por la letra c . Como comentamos antes, el número de relaciones que una persona puede mantener está limitado a un número pequeño. De ahí, podemos considerar sólo grafos que tengan un grado medio bajo. Por simplicidad, en este trabajo consideramos un grado medio de 4, que permite tratar fácilmente con retículas regulares 2d. El análisis con $c = 5$ y $c = 6$ conduciría a conclusiones similares.

Otro punto importante del modelo es la fuerza de coordinación ξ , que definimos en la Ec.(7.1). Este parámetro mide el grado en que la fuerza de la relación disminuye con la distancia entre los vértices. Es lógico pensar que podría depender fuertemente de la naturaleza de las relaciones y del tipo de organización o de sus miembros. Sin embargo, esos aspectos psicológicos y sociológicos están fuera de nuestros objetivos. Por simplicidad, en todas las simulaciones presentadas en este capítulo la fuerza de coordinación ha sido fijada a un valor de $\xi = 2$. Aunque otro valor diferente pudiera haber sido escogido, esta magnitud es razonable, porque el grado de coordinación suministrado por cualquier relación de primer orden es $\Gamma_1 = e^{-2} \simeq 0.135$, que indica un aumento de aproximadamente 13% sobre la información asociada a cada vértice particular aislado.

7.3.1 Coordinación en diferentes estructuras de grafo

Una vez que hemos impuesto las restricciones precedentes, el siguiente paso es el de determinar las diferentes estructuras de grafo que deben ser analizadas. Una primera opción son las retículas regulares. Por tanto, consideramos una retícula regular de 2d con grado $c = 4$. Si llamamos η_i al número de vecinos de grado i , para retículas de gran tamaño, la distribución de η viene descrita de la manera siguiente: $\eta_0 = 1$, $\eta_i = 4i$. Consiguientemente, usando la Ec.(7.3), el grado de coordinación total de un vértice i vendrá dado por

$$\Gamma_i = 1 + 4 \sum_{j=1}^n j e^{-j\xi}, \quad (7.5)$$

donde $2n^2 + 2n + 1 = N$, siendo N el orden del grafo. Para una retícula regular infinita ($N \rightarrow \infty$), esta expresión puede ser evaluada como la derivada de una progresión geométrica, tomando un valor

$$\Gamma_i = 1 + \frac{4e^{-\xi}}{(1 - e^{-\xi})^2}. \quad (7.6)$$

Como consideramos una retícula regular infinita, puede demostrarse que para todos los vértices del grafo $\Gamma_i = \bar{\Gamma}$ (dado que Γ_i no depende i). Denominaremos ese valor Γ_∞ . Puede demostrarse que Γ_∞ es un límite superior del grado de coordinación medio para cualquier retícula regular 2d con $c = 4$. Hemos realizado simulaciones numéricas sobre retículas regulares no periódicas que se muestran en la Fig. 7.1. En ella, se observa que a medida que aumenta el orden del grafo, el grado de coordinación medio aumenta asintóticamente hacia Γ_∞ . Es importante destacar que a partir de un cierto valor del orden del grafo, el aumento en el grado de coordinación medio se hace muy pequeño. En términos sociológicos, esto admite una interpretación interesante. La eficiencia, que puede ser vista como el grado de coordinación medio, no muestra un aumento considerable una vez que la organización alcanza un cierto tamaño.

Después de haber analizado las retículas regulares, intentaremos estudiar cómo el grado de coordinación medio cambia cuando se añade un cierto grado de aleatoriedad sobre la estructura del grafo. Adoptando una aproximación similar a la utilizada por Watts y Strogatz [105, 106], definimos una familia de grafos *small world* basados en retículas regulares 2d a través del siguiente algoritmo:

- Se elige el orden N de un grafo y se construye una retícula regular no periódica con N vértices. Al grafo resultante lo llamamos G .
- Se escoge el valor de un parámetro $\alpha \in [0, 1]$ que mide el grado de aleatoriedad con que alteraremos el grafo dado.
- Para cada arista de G , eliminamos esa arista con probabilidad α y reconectamos de nuevo los vértices implicados de un modo aleatorio. Tras esta operación, obtenemos un nuevo grafo G_α que tiene el mismo número de vértices que G , pero que está conectado de un modo irregular que depende del valor de α .

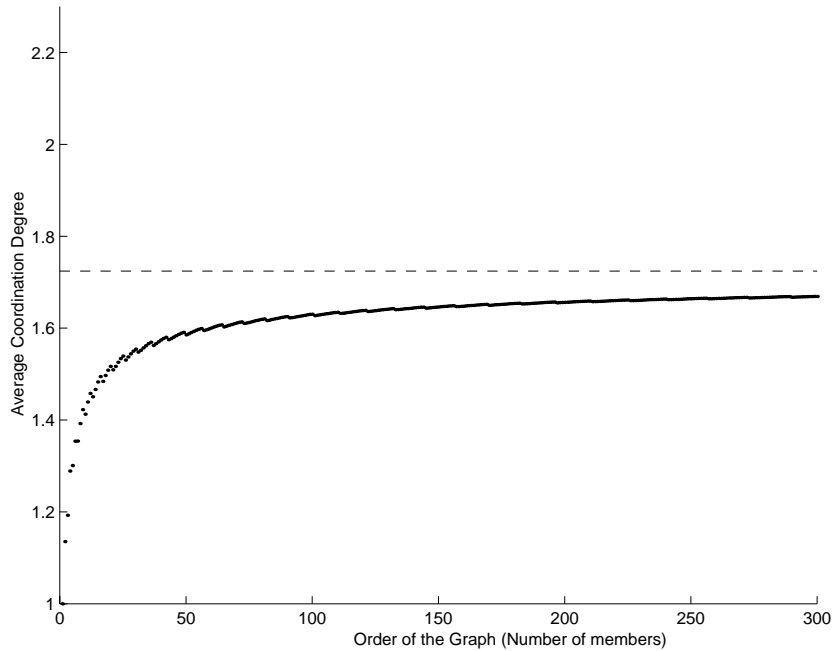


Figura 7.1. Grado de coordinación medio $\bar{\Gamma}$, de una retícula regular con $c = 4$ y $\xi = 2$. Las simulaciones han sido realizadas para órdenes que varían de $N = 1$ a $N = 300$. La línea discontinua representa el límite superior Γ_{∞} para esta opción de parámetros c y ξ . Es importante comentar que hemos usado retículas $2d$ no periódicas en las simulaciones. Para grafos de orden menor que $N = 4$ el grado del grafo c es igual a N .

La pregunta que surge inmediatamente es cómo el grado de coordinación medio depende de α . Cuando $\alpha = 0$, $G = G_{\alpha}$ y el grafo es una retícula regular $2d$ no periódica. Esta situación fue descrita en la Fig. 7.1. Si elevamos el valor del parámetro de aleatoriedad α , el grafo se hace cada vez más arbitrario. Simulaciones numéricas para diferentes valores del parámetro de aleatoriedad α han sido realizadas, los resultados se muestran en la Fig. 7.2, donde se observa que el grado de coordinación medio aumenta cuando el valor de α aumenta. Es también interesante comentar que, para ciertos valores de α , el grado de coordinación medio sobrepasa el límite Γ_{∞} de la retícula regular. Para ofrecer una mejor comprensión del papel desempeñado por el parámetro de aleatoriedad α , hemos usado un grafo con 300 nodos, y hemos realizado diferentes simulaciones para varios valores de α . El resultado se muestra en la Fig. 7.3, en la que se observa que la variación de $\bar{\Gamma}$ con α sigue una función monótona no lineal.

Como una secuencia natural del análisis anterior, consideramos ahora el comportamiento del grado de coordinación medio de un grafo aleatorio. Para construir un grafo aleatorio tomamos el modelo tradicional Erdős Rényi [107]. Comenzando con N nodos, cada par de nodos está conectado con probabilidad p y no conectado

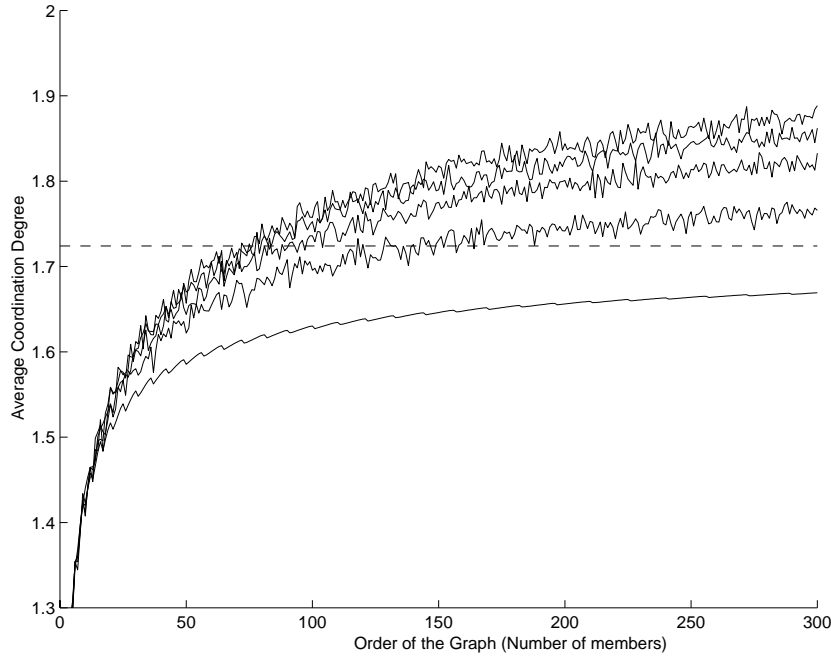


Figura 7.2. Grado de coordinación medio $\bar{\Gamma}$, para una retícula pseudo regular $2d$ con $c = 4$ y $\xi = 2$. El parámetro de aleatoriedad α toma los valores, desde la curva inferior a la curva superior, 0, 0.25, 0.5, 0.75, y 0.99 respectivamente. Las simulaciones han sido realizadas para órdenes que varían de $N = 1$ a $N = 300$. La línea discontinua representa el límite superior Γ_{∞} para retículas regulares $2d$.

con probabilidad $1 - p$. También debemos considerar la restricción impuesta antes, es decir el grado medio del grafo debe ser igual a 4. En esta situación, podemos fácilmente demostrar que

$$p = \frac{4}{N-1}. \quad (7.7)$$

Utilizando este resultado, podemos construir un grafo aleatorio para cualquier valor de N , asumiendo un grado de distribución medio de 4. Como hicimos previamente con las retículas regulares, podemos tratar de encontrar un límite superior para el grado de coordinación medio de un grafo aleatorio con $c = 4$. Es fácil demostrar que el valor máximo para el grado de coordinación medio se alcanza cuando todos los vecinos de orden m son siempre nuevos vértices (no son vecinos de i en ningún orden menor que m). Como cualquier vértice sobre un grafo arbitrario tiene, por regla general, c nuevos vecinos, es fácil entender que cuando $N \rightarrow \infty$, alcanzamos un límite superior para el grado de coordinación medio

$$\bar{\Gamma} = \sum_{i=1}^{\infty} (ce^{-\xi})^i, \quad (7.8)$$

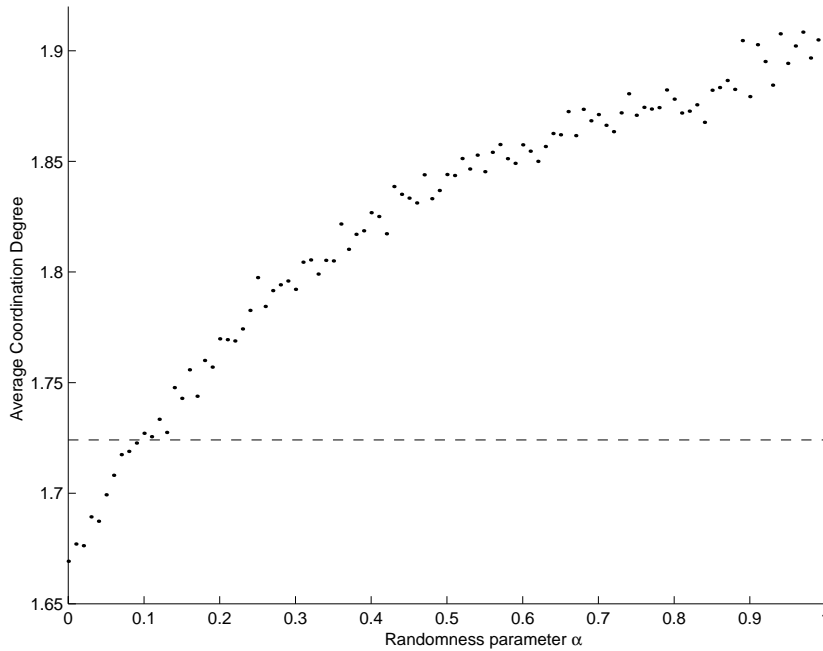


Figura 7.3. Grado de coordinación medio $\bar{\Gamma}$, como una función del parámetro de aleatoriedad α en retículas pseudo regulares con $c = 4$ y $\xi = 2$. Los cálculos han sido realizados para un grafo fijo de orden $N = 300$.

que es igual a

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{1 - ce^{-\xi}} = \Gamma_{\infty}^R, \quad (7.9)$$

cuando $ce^{-\xi} < 1$, e ∞ en el resto de los casos. En nuestro caso, $c = 4$ y $\xi = 2$, así, Γ_{∞}^R es un límite finito superior para el valor del grado de coordinación para cualquier grafo con el mismo grado de medio. En la Fig. 7.4, se muestra una simulación de más de 500 grafos aleatorios diferentes con $c = 4$. Puede ser observado que el valor del grado de coordinación medio está siempre bajo el límite Γ_{∞}^R . Este resultado junto con los obtenidos en el análisis de otros tipos de grafos, muestran que la misma conclusión podría ser obtenida independientemente de la estructura del grafo. Por consiguiente podemos concluir que el punto clave está en la hipótesis usada en nuestro modelo acerca de la degradación de la información. Un rasgo interesante, que puede ser observado en la Fig. 7.4 es la convergencia bastante lenta del grado de coordinación. De hecho, puede ser probado que sigue una ley de potencias con correcciones logarítmicas. El comportamiento de esta ley de potencias puede ser recuperado truncando la suma en un n fijo:

$$\bar{\Gamma}_n = \frac{(ce^{-\xi})^n - 1}{ce^{-\xi}} ce^{-\xi}, \quad (7.10)$$

donde n es el diámetro del grafo y $n = \log_c N$

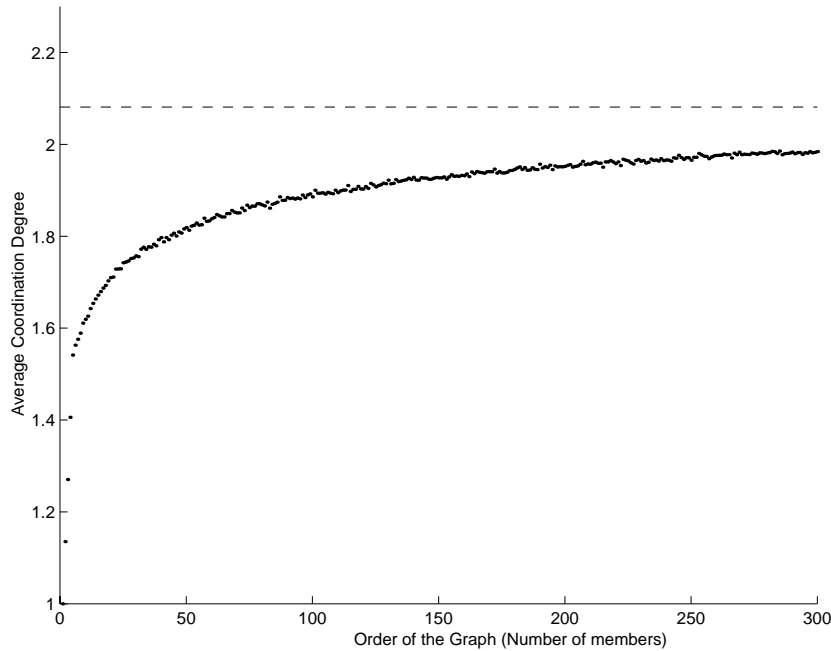


Figura 7.4. Grado de coordinación medio $\bar{\Gamma}$, para grafos arbitrarios con grado medio $c = 4$ y $\xi = 2$. Los cálculos han sido realizados para grafos cuyos órdenes varían de $N = 1$ a $N = 300$. La línea discontinua representa el límite superior Γ_{∞}^R .

Uno de los desafíos más interesantes que este modelo sugiere es la solución del problema siguiente: considerando un conjunto de N nodos, un grado c y un valor para la fuerza de coordinación ξ , tratar de encontrar la estructura topológica del grafo que los una, de modo que el grado de coordinación medio del mismo sea el máximo de todos los grafos posibles con el mismo N , c , y ξ . Una respuesta rápida e incorrecta es pensar que dicho grafo es un árbol c -regular. Como es sabido, un árbol infinito es un grafo perfectamente expansible, de modo que la coordinación media para tal árbol será el máximo posible. Lamentablemente, cuando el grafo que se considera es finito, el árbol deja de ser perfectamente expansible. Hay un conjunto de grafos finitos perfectamente expansibles denominado grafos de Moore, que son los grafos c -regulares más eficientes, en el sentido de que cada vértice alcanza $c - 1$ nuevos vértices a la vez, pero ha sido probado [116] que esta clase de grafos no es realizable excepto en algunos casos muy particulares. Por tanto, la cuestión relativa a encontrar un grafo que maximice el grado de coordinación medio para un número dado de nodos de grado constante todavía sigue abierta.

7.3.2 El límite 150

En relación con la discusión precedente, es interesante destacar que algunos científicos proponen la existencia de un límite natural para el número máximo de miembros en grupos y organizaciones sociales. Probablemente el trabajo más importante en esta dirección es el realizado por el antropólogo británico R. Dunbar [117], quien relacionó el tamaño del neocortex (una parte del cerebro relacionado con las capacidades sociales y lingüísticas) y el tamaño máximo del grupo en los primates. Aplicando esta relación para el *Homo Sapiens*, se estima que el tamaño máximo de grupo en este caso es de 147.8, es decir, aproximadamente 150.

En la literatura antropológica, el número 150 aparece una y otra vez en relación con el tamaño máximo de organizaciones y grupos. Según [118], en 21 sociedades indígenas diferentes que van desde los Walbiri de Australia a los Tauade de Nueva Guinea, pasando por los Ammassalik de Groenlandia y los Ona de Tierra de Fuego; se ha determinado que el número medio de individuos en sus poblados es de 148.4. Las mismas conclusiones son obtenidas en grupos religiosos como los Hutterites que tienen una política estricta por la que siempre que una colonia se acerca a los 150 individuos, esta se divide en dos y se comienza una nueva. Otro ejemplo interesante que aparece en [118] es la empresa americana *Gore Associates*, una firma de alta tecnología que tiene su central en Newark, Delaware, en la que cada vez que una sede alcanza los 150 empleados, esta se divide en dos.

Aunque estos argumentos parezcan plausibles, no dan ninguna explicación acerca de la existencia de comunidades de otros tamaños diferentes. Es evidente que no todas las empresas, instituciones o congregaciones religiosas están compuestas de grupos de 150 personas. Sería fácil encontrar cientos de ejemplos de organizaciones con tamaños de miles de personas, cuyos miembros no muestran ningún síntoma de sobrecarga de información. Sin embargo, la existencia propuesta de un límite para la información con la que una persona puede tratar en una comunidad particular parece razonable. La explicación de esta paradoja puede ser obtenida analizando la relación entre la cantidad de información, el número de miembros y la estructura de las redes sociales.

Una de las conclusiones más importantes que pueden ser extraídas del modelo propuesto en este capítulo es que la cantidad de información que un individuo es capaz de recibir de la red no es proporcional al número de miembros de la comunidad, sino que sigue una pauta fuertemente no lineal que converge a un valor constante y finito para N suficientemente grande. Esto tiene una interpretación social inmediata, desde el punto de vista del individuo, una vez que el valor del grado de coordinación medio está cerca del límite, un aumento significativo del número de miembros en la organización no produce un aumento del grado de coordinación medio. Esto significa que la información recibida por un individuo que pertenezca una red particular podría estar bajo el límite de Dunbar independientemente del número de miembros que la compongan. Así, la red puede crecer indefinidamente sin ninguna clase de sobrecarga de información.

Por otra parte, también hemos visto que la relación entre el grado de coordina-

ción medio y el número de miembros depende fuertemente de la estructura de la organización. Podría ser posible que para algunas estructuras particulares, la cantidad de información recibida por los vértices alcance el límite de Dunbar para un número particular finito de sus miembros, que podría ser el citado límite 150.

En cualquier caso, el análisis realizado en este capítulo muestra que el tamaño de una organización no puede ser entendido solamente en términos de las propiedades psicológicas de sus miembros como propuso Dunbar. La estructura y las propiedades de transferencia de información de la red también pueden desempeñar un papel definitivo en este sentido.

7.4 Flujos de información en organizaciones

Como puede comprenderse al leer la sección precedente, el grado de coordinación medio puede tomar valores muy diferentes en una organización dada dependiendo de la estructura topológica de las relaciones entre sus miembros. Por tanto, debemos aceptar que la estructura tiene un impacto notable sobre la eficiencia global en estas redes. Además, es razonable pensar que esta topología debería ser diseñada de modo que maximice este parámetro, principalmente en el caso organizaciones basadas en la información. Al observar la estructura de la mayoría de las organizaciones es fácil darse cuenta de que las empresas comerciales, las organizaciones gubernamentales, el ejército e incluso las universidades siguen, por lo general, reglas estrictamente jerárquicas en el diseño de su topología. Uno puede pensar que este hecho está probablemente relacionado con el objetivo de maximizar la eficiencia. Sin embargo, esto está lejos de la realidad. Algunas simulaciones presentadas en la Fig. 7.5, muestran que los árboles regulares son una de las peores topologías que uno puede elegir en términos de transferencia de información.

Este hecho sugiere que pueden existir motivos más fuertes que la eficiencia desempeñando algún papel crucial en este tipo de redes sociales. Una explicación razonable de este hecho es que ese tipo de comunidades sociales están principalmente basadas en relaciones de autoridad. Por tanto, las estructuras jerárquicas son las preferidas porque reflejan claramente la posición que cada actor ocupa dentro de la organización. Por este motivo, en la sección siguiente, estudiaremos en profundidad las redes jerárquicas y trataremos de mostrar que esta clase de topologías son un reflejo de las relaciones de autoridad, beneficiando los niveles jerárquicos más altos en términos de transferencia de información.

7.4.1 Redes jerárquicas

En esta sección, estamos especialmente interesados en el análisis de redes sociales basadas en una topología jerárquica. El ejemplo más característico de grafos con esta estructura está en los árboles regulares. Un árbol regular es un grafo regular (todos los vértices tienen el mismo grado c) que es conexo (existe siempre un camino que une cualquier pareja de sus vértices) y que no contiene ningún bucle (no hay ningún camino que vaya de un actor a sí mismo que no visite el mismo vértice dos

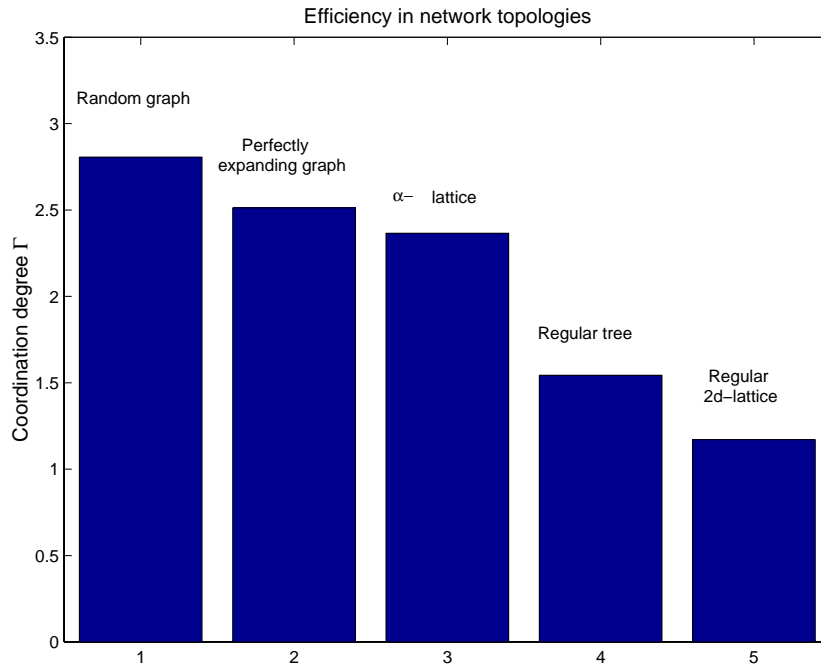


Figura 7.5. Eficiencia para diferentes topologías en términos del grado de coordinación medio. Todos los grafos comparten el mismo número de actores, $N = 485$, y el mismo grado, $c = 4$.

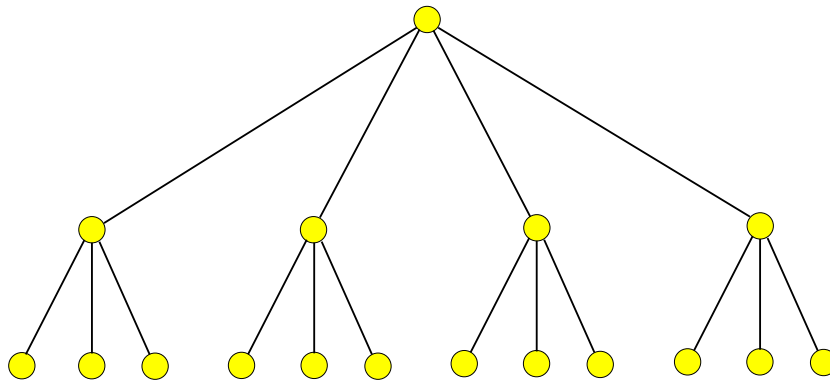


Figura 7.6. Un árbol truncado regular con profundidad $\Lambda = 3$ y grado $c = 4$.

veces). Cada árbol regular tiene un vértice particular, denominado nodo raíz o cima del árbol, que es el vértice más central en el grafo. Es importante destacar que, por definición, un árbol regular debe tener un orden infinito. Para ser capaz de tratar con grafos finitos, a partir de un árbol regular, definimos su árbol regular truncado de profundidad Λ como la vecindad de orden $\Lambda - 1$ del nodo raíz (el subgrafo constituido por todos sus vecinos de orden menor o igual a $\Lambda - 1$ y las aristas que los interconectan).

La Fig. 7.6 muestra un árbol truncado regular con $\Lambda = 3$ y $c=4$. Es fácil comprobar que este árbol no es realmente regular porque los vecinos de orden 2 del nodo raíz no tienen c aristas. Sin embargo, por claridad, en el resto de este capítulo, evitaremos usar el término truncado y hablaremos directamente de árboles regulares de profundidad Λ y grado c para referirnos a su forma truncada.

Nuestro objetivo en esta sección es desarrollar un marco matemático para el estudio del flujo de información en términos del grado de coordinación en árboles regulares jerárquicos que representen redes sociales. Con este objetivo en mente, seguimos una estrategia que consiste en dos pasos. Primero, investigamos como la información fluye desde las ramas hasta a la cima del árbol. Acto seguido, evaluamos el grado de coordinación para cada vértice en la dirección opuesta: comenzando por la parte superior y terminando en la inferior. Finalmente, mostramos que esta técnica conduce a una expresión recurrente, que puede ser usada para calcular el grado de coordinación de cualquier actor en la red. Sin embargo, antes de comenzar a hacerlo, es necesario definir algunos parámetros adicionales.

Definimos el nivel desde abajo δ de un vértice en un árbol regular como el nivel que este ocupa en la jerarquía, comenzando la cuenta en la parte inferior del árbol. Por ejemplo, en un árbol con 6 niveles ($\Lambda = 6$), δ toma valores entre 1, para los nodos en el nivel jerárquico más bajo, y 6, para la raíz.

Definimos el nivel desde arriba v de un vértice en un árbol regular como el nivel que ocupa en la jerarquía comenzando a contar por la parte superior. Por tanto, en el ejemplo precedente, v varía entre 6, para los nodos más bajos, y 1, para la cima. Es interesante comentar que, en todo árbol regular con profundidad Λ , un vértice con nivel desde abajo δ debe tener $v = \Lambda - \delta + 1$ y viceversa.

Ahora, definimos la información exportada Υ de un vértice como el grado de coordinación de este vértice en el subgrafo constituido por todos sus vecinos localizados bajo ese vértice particular (todos los nodos con nivel desde abajo inferior para los que exista un camino hacia el vértice dado en ese subgrafo). En árboles regulares, todos los vértices con el mismo δ tienen la misma información exportada, por este motivo, podemos decir que Υ_δ es la información exportada por cualquier vértice con nivel desde abajo δ .

Puede ser entendido que $\Upsilon_1 = 1$, porque todos los nodos con $\delta = 1$ no tienen vecinos con nivel desde abajo inferior. Subiendo en el árbol, podemos ver que $\Upsilon_2 = 1 + (c - 1)e^{-\xi}$ (su propia contribución más la contribución de sus $c - 1$ vecinos inferiores) y $\Upsilon_3 = 1 + (c - 1)e^{-\xi}(1 + (c - 1)e^{-\xi})$. Obsérvese que esta expresión podría ser escrita en una forma más compacta de la manera siguiente: $\Upsilon_2 = 1 + (c - 1)e^{-\xi}\Upsilon_1$, $\Upsilon_3 = 1 + (c - 1)e^{-\xi}\Upsilon_2$. De hecho, puede demostrarse por inducción, que esta relación es cierta para todo nivel desde abajo en un árbol regular jerárquico. Entonces podemos obtener una expresión general recurrente para la información exportada de la manera siguiente

$$\begin{cases} \Upsilon_i = 1, & \text{si } i = 1 \\ \Upsilon_i = 1 + (c - 1)e^{-\xi}\Upsilon_{i-1}, & \text{si } i > 1 \end{cases} \quad (7.11)$$

A partir de estas ecuaciones recurrentes uno puede obtener, $\Upsilon_i = \frac{1-y^i}{1-y}$ donde $y =$

$(c-1)e^{-\xi}$, y con la expresión de la información exportada, podemos calcular el grado de coordinación que cada vértice obtiene. Sólo tenemos que considerar un árbol regular con profundidad Λ y grado c . La simetría del árbol hace fácil entender que el grado de coordinación de todos los vértices que ocupan el mismo nivel desde arriba en la jerarquía es idéntico. Por tanto, llamamos Γ_v al de grado de coordinación para todos los vértices de nivel desde arriba v . Para árboles regulares, puede ser probado que la información que un nodo recibe de cualquiera de sus aristas inferiores es proporcional a la información que el vértice situado al otro lado de esa arista exporta. Esto es debido a que en un árbol regular existe un sólo camino independiente que una un par de nodos, por tanto los vértices que pueden ser alcanzados desde una arista particular son sólo accesibles a través de ella.

Con estas premisas, es sencillo demostrar que el grado de coordinación de la raíz de un árbol toma un valor $\Gamma_1 = 1 + ce^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-1}$, descendiendo un escalón en la jerarquía, podemos observar que $\Gamma_2 = 1 + (c-1)e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-2} + e^{-\xi} + (c-1)e^{-2\xi}\Upsilon_{\Lambda-1}$, que puede ser escrito de manera más compacta como $\Gamma_2 = 1 + (c-1)e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-2} + e^{-\xi}(\Gamma_1 - e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-1})$. Esta expresión tiene en cuenta la propia contribución del vértice, 1, la contribución que llega desde las aristas inferiores, $(c-1)e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-2}$, y la contribución obtenida a través de la arista superior, $e^{-\xi}(\Gamma_1 - e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-1})$. Esta relación puede ser generalizada para todos los niveles intermedios del árbol del modo siguiente: $\Gamma_i = 1 + (c-1)e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-i} + e^{-\xi}(\Gamma_{i-1} - e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-i+1})$. Sin embargo, para los vértices del fondo del árbol, no hay aristas inferiores, por tanto la expresión obtenida para ellos es $\Gamma_\Lambda = 1 + e^{-\xi}(\Gamma_{\Lambda-1} - e^{-\xi})$. Estas relaciones pueden ser compactadas en una sola expresión recursiva de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_i = 1 + ce^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-i}, \text{ si } i = 1 \\ \Gamma_i = 1 + (c-1)e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-i} + e^{-\xi}(\Gamma_{i-1} - e^{-\xi}\Upsilon_{\Lambda-i+1}), \text{ si } 1 < i < \Lambda \\ \Gamma_i = 1 + e^{-\xi}(\Gamma_{\Lambda-1} - e^{-\xi}), \text{ si } i = \Lambda \end{array} \right. \quad (7.12)$$

Utilizando esta ecuación junto con la solución de la Ec.(7.11) uno puede evaluar analíticamente la información, Γ_i , que cada actor es capaz de obtener dentro de una organización estructurada como un árbol regular. Debido a estos resultados, es posible analizar cómo la información es distribuida dentro de las estructuras jerárquicas, tarea que es desarrollada en la sección siguiente.

7.4.2 Distribución de información y crecimiento jerárquico

Como hemos visto previamente, la topología jerárquica es subóptima en términos de eficiencia. Conociendo este hecho, una cuestión interesante es determinar por qué muchos líderes de empresas y organizaciones escogen esta clase de topología. Dado que las redes jerárquicas están por lo general basadas en relaciones de autoridad entre los actores, si somos capaces de demostrar que existe una conexión estrecha entre el nivel jerárquico de un actor y la información que recibe, podríamos obtener una justificación plausible sugiriendo por qué esta clase de estructura es tan común. Para demostrarlo, nuestro interés debe concentrarse en investigar cómo la información se distribuye entre los actores de una comunidad. Para observar qué efecto tiene una

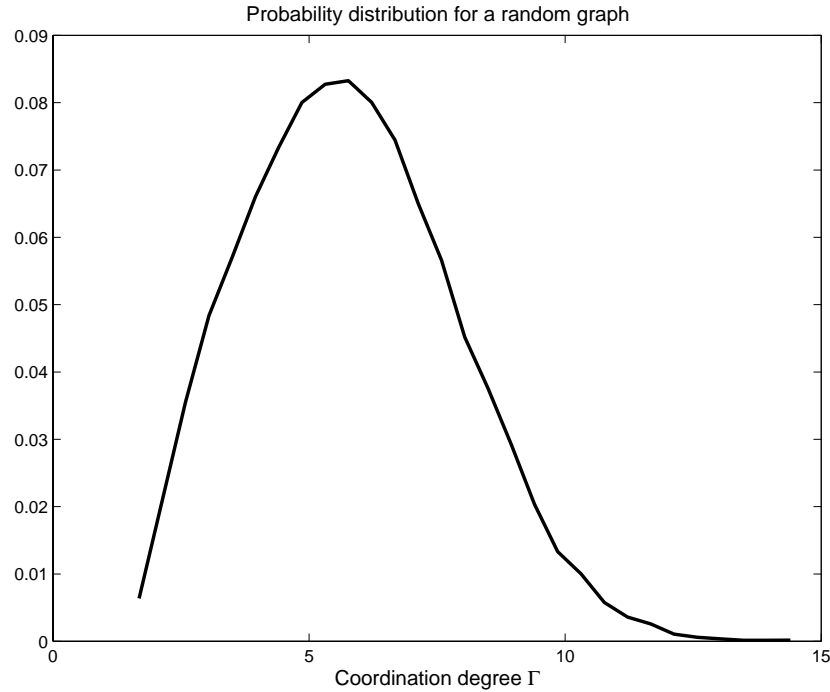


Figura 7.7. Distribución de probabilidad del grado de coordinación en un grafo aleatorio de orden $N = 200$ y grado medio $\bar{c} = 3$. La figura ha sido realizada como un promedio de 150 grafos diferentes. Los vértices aislados han sido eliminados.

topología jerárquica sobre la distribución de la información, es interesante ver cómo esta información está distribuida en otras estructuras diferentes. Para simplificar, hemos escogido las más típicas: retículas regulares y grafos aleatorios.

La Fig. 7.7 representa la distribución de probabilidad del grado de coordinación en un típico grafo aleatorio. Puede observarse que la mayor parte de los vértices están localizados cerca del máximo de la distribución en forma de gamma, mientras sólo una minoría recibe claramente una cantidad diferente de información que el resto. Estas fluctuaciones son principalmente producidas por la distribución del grado en sí misma, que, como es conocido, sigue una ley de Poisson en todo grafo aleatorio [98]. Este resultado indica que algunos actores de la red reciben más información, pero con el coste de aumentar el número de relaciones que mantienen, y por tanto, aumentando el tiempo y el esfuerzo necesario para el desarrollo de sus interacciones sociales.

Al considerar retículas regulares, el análisis es mucho más simple. Para las retículas regulares infinitas o periódicas, todos los vértices desempeñan el mismo papel en la red y, por tanto, todos comparten el mismo grado de coordinación. Así, la distribución de probabilidad de la información es una función delta de Dirac centrada en el valor particular del grado de coordinación medio. Esto indica que, en términos de información, las retículas regulares son las estructuras más democráticas, porque

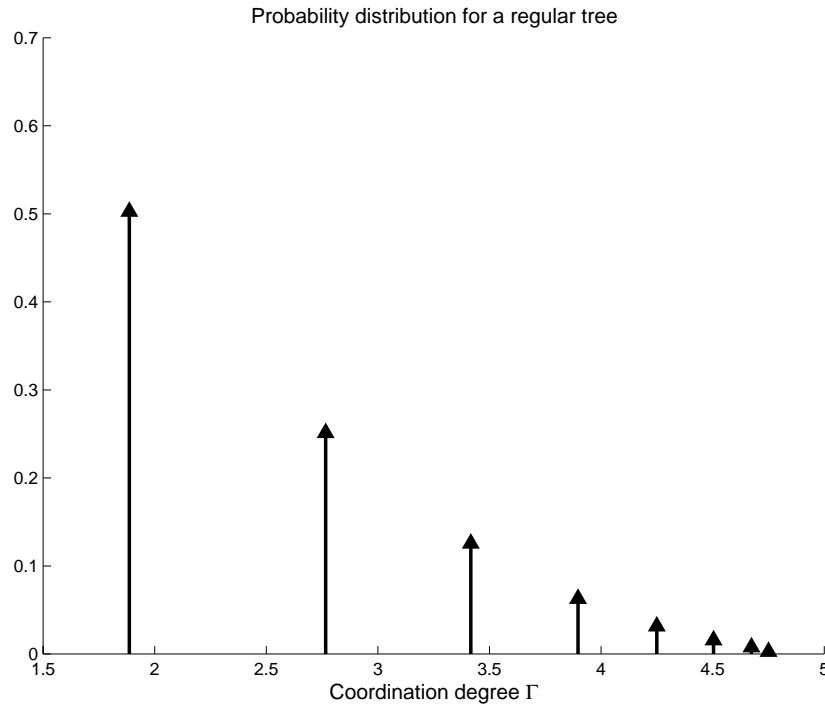


Figura 7.8. *Distribución de probabilidad del grado de coordinación en un árbol truncado regular de profundidad $\Lambda = 8$ y grado $c = 3$. La fuerza de coordinación está fijada a un valor $\xi = 1.0$.*

todos los actores de la comunidad reciben la misma cantidad de información.

Sin embargo, los árboles jerárquicos tienen un comportamiento interesante. Como puede ser evaluado a partir de la Ec.(7.12), la distribución del grado de coordinación de los vértices sigue una forma monótona como la representada en la Fig. 7.8. Puede ser observado que el número de nodos que comparten un valor particular del grado de coordinación disminuye con este. Frente al comportamiento de los grafos aleatorios, los vértices que reciben más información no poseen un número más alto de aristas porque, en los árboles regulares, todos los nodos tienen el mismo grado (para los árboles truncados regulares esto es verdadero excepto en los vértices localizados en el nivel jerárquico más bajo).

Aunque nada se ha dicho sobre la posición de los vértices privilegiados, podemos imaginar que este hecho tiene una relación con la posición que estos ocupan en la jerarquía. Efectivamente, como la Fig. 7.9 muestra, el grado de coordinación de los vértices del árbol depende exclusivamente de su nivel desde arriba. Puede observarse que cuanto más alta sea la posición en la jerarquía, mayor será la cantidad de información que puede ser manejada. Esta es ciertamente una conclusión muy interesante porque muestra que la topología en esta clase de redes beneficia de manera intrínseca a los nodos localizados en los niveles superiores de la jerarquía, permitiéndolos recibir más información por arista que todos los vértices localizados

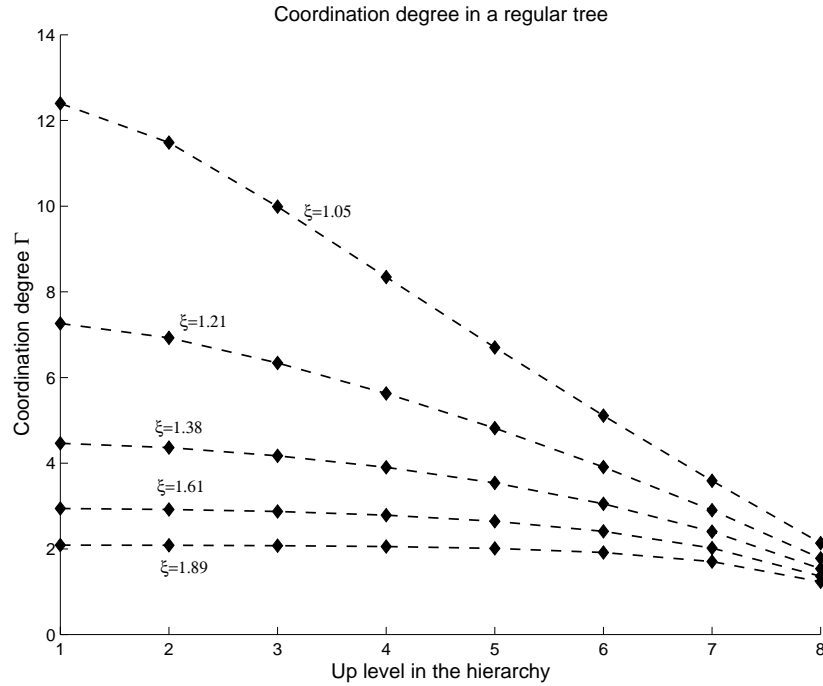


Figura 7.9. Grado de coordinación de los vértices como una función de su nivel en la jerarquía. La simulación ha sido realizada con un árbol truncado regular de profundidad $\Lambda = 8$ y grado $c = 4$ para 5 valores diferentes de la fuerza de coordinación.

en posiciones inferiores.

De hecho, puede demostrarse que esta es una conclusión muy general para árboles regulares. Independientemente del número de relaciones c de cada vértice, y de la fuerza de coordinación ξ , dados dos nodos cualesquiera con nivel desde arriba $v_1 \leq v_2$, se verifica siempre que $\Gamma_{v_1} \geq \Gamma_{v_2}$. Esto indica que la estructura jerárquica garantiza que, en términos de información, la eficiencia de las relaciones siempre mejora a medida que ascendemos en el árbol. Así, considerando que todos los actores invierten el mismo esfuerzo en relacionarse con los demás, la posición en la jerarquía determina la cantidad de información que puede ser obtenida.

Estas ideas pueden justificar por qué la mayor parte de las organizaciones son jerárquicas. Para clarificar estos conceptos, podemos desarrollar un modelo simple de crecimiento en comunidades sociales. En cualquier tipo de organización, es razonable asumir que los actores son sólo capaces de utilizar un tiempo limitado relacionándose con el resto. Es decir, el número de relaciones que se pueden mantener está limitado a un número c fijo (el grado de cada vértice está entre 0 y c). Además, aceptamos que todos los actores hacen el mismo esfuerzo para mantener estas relaciones, es decir, la fuerza de coordinación de las relaciones ξ es la misma para todos ellos. Para que el modelo de crecimiento sea apropiado, también debemos asumir dos reglas más. En primer lugar que la red social está compuesta originalmente

por un solo actor y que el crecimiento ocurre por la adición de actores nuevos. En segundo lugar que todos los nuevos vértices añadidos a la red pueden establecer una sola relación con cualquiera de los miembros preexistentes. Además, la arista que representa esta relación debe ser establecida de modo que el nuevo vértice obtenga un grado de coordinación (información) máximo de la red. Con estas restricciones simples, es fácil demostrar que la red crece siguiendo una topología en forma de árbol jerárquico, porque todos los nuevos vértices tratan de unirse al nivel jerárquico más elevado que tenga al menos una relación libre (un grado inferior a c).

Esta es una conclusión notable porque proporciona una explicación sobre por qué la mayor parte de empresas y organizaciones se disponen siguiendo estructuras estrictamente jerárquicas y también ilustra por qué, por lo general, los niveles más altos de la jerarquía son ocupados por los miembros más viejos. Sin embargo, para que este modelo sea plausible, sería interesante justificar por qué los nuevos vértices desean establecer su arista maximizando el grado de coordinación. En la sección siguiente mostramos que el grado de coordinación es ciertamente un parámetro apropiado para la medida de la centralidad (la influencia) que un actor tiene dentro de una organización.

7.4.3 Centralidad y dominación en organizaciones

Las medidas de centralidad en redes sociales constituyen una tentativa de evaluar el poder o la influencia que cada actor tiene dentro de una comunidad. Hay muchas alternativas diferentes para medir este tipo de parámetros, pero seguramente las más populares son la centralidad por cercanía, C_c , y la centralidad por *betweenness*, C_b [119]. La centralidad de cercanía está definida en términos de distancia entre los nodos del grafo. Considerando un vértice v

$$C_c(v) = \frac{1}{\sum_{i \in G} d_{vi}}, \quad (7.13)$$

donde G es el conjunto de todos los vértices del grafo y d_{vi} es la distancia entre los nodos v e i . Por otro lado, la centralidad por *betweenness* viene definida en términos del número de caminos más cortos que atraviesan un vértice dado v

$$C_b = \frac{1}{\sum_{i,j \in G} b_v(i,j)}, \quad (7.14)$$

donde G es de nuevo el conjunto de todos los vértices del grafo y $b_v(i,j)$ es igual a 1 si el camino más corto entre i y j pasa por v y 0 en caso contrario.

Es importante comentar que ambas definiciones de centralidad mantienen una relación estrecha con la noción de flujo de información en una red social. Según [101], C_b es una medida del control que un actor tiene sobre la información que fluye entre los demás, mientras que C_c es una medida de la influencia del vértice, en términos de su acceso a la información. Ciertamente, considerar el promedio de las distancias

que un vértice mantiene con el resto de un grafo conexo es una medida apropiada de la información que este puede alcanzar. Sin embargo, esta medida no tiene en cuenta otros parámetros importantes como la fuerza de la relación. Por esta razón, proponemos el grado de coordinación como una medida alternativa de centralidad en términos de la información que un vértice puede alcanzar. De hecho, es fácil demostrar que ambas medidas mantienen una relación muy estrecha: considerando dos nodos u y v en un grafo, puede ser demostrado que si $C_c(u) > C_c(v)$ entonces, para cualquier valor de la fuerza de coordinación $\xi > 0$, $\Gamma_u > \Gamma_v$ (observe que si $\sum_{i \in G} d_{ui} < \sum_{i \in G} d_{vi}$ entonces, para todo $\xi > 0$, $\sum_{i \in G} e^{-\xi d_{ui}} > \sum_{i \in G} e^{-\xi d_{vi}}$). Como una medida de centralidad, el grado de coordinación proporciona la influencia que cada actor tiene en una comunidad social, por tanto, los actores que se integran en una nueva red social tratarán de engancharse a ella de modo que maximicen este parámetro, tal y como asumimos en el modelo de crecimiento propuesto en la sección precedente.

Aunque el grado de coordinación sea una buena aproximación para medir la influencia global que un vértice tiene en una red, no es apropiado para medir la supremacía que ese vértice tiene sobre los demás. En redes jerárquicas, donde las relaciones son establecidas por conexiones de autoridad, sería interesante definir un nuevo parámetro que evalúe la supremacía. Una medida alternativa para medir la autoridad, en términos de control de la información entre actores, debe evaluar la diferencia relativa de información entre los dos vértices. Así, considerando dos vértices v y u sobre un grafo, definimos la dominación de información de v con respecto a u como en ese grafo como

$$\Delta_{uv} = \frac{\Gamma_v - \Gamma_u}{\Gamma_u}. \quad (7.15)$$

El predominio de información puede ser usado para observar otro rasgo interesante de la topología jerárquica. Teniendo en cuenta las propiedades de los árboles regulares que citamos antes, es fácil entender que si u ocupa una posición más alta que v en la jerarquía, entonces $\Delta_{uv} \geq 0$. Además, este parámetro depende fuertemente del valor de la fuerza de las relaciones. Como la Fig. 7.10 muestra, considerando la dominación del vértice superior con respecto a cualquiera de sus subordinados, un máximo pronunciado aparece en la región de bajo ξ (fuerza de las relaciones elevada). Este máximo puede ser calculado analíticamente usando las Ecs.(7.11-7.12).

Puede ser demostrado que este resultado es muy general y aplicable a todos los niveles de la jerarquía y a cualquier árbol regular. Intuitivamente, es fácil comprender que cuando $\xi = \infty$ no hay ningún flujo de información sobre la organización y $\Gamma_i = 1$ para todos los vértices. Aplicando la Ec.(7.15) podemos ver que $\Delta_{uv} = 0$ independientemente de la posición de u y v . Por otra parte, cuando $\xi = 0$ no hay ninguna degradación de la información y $\Gamma_i = N$, donde N es el número de vértices en el grafo, consiguientemente $\Delta_{uv} = 0$ una vez más. Como $\Delta_{uv} \geq 0$, necesariamente debe haber al menos un máximo (observe que $\Delta_{uv} > 0$ para valores intermedios de ξ).

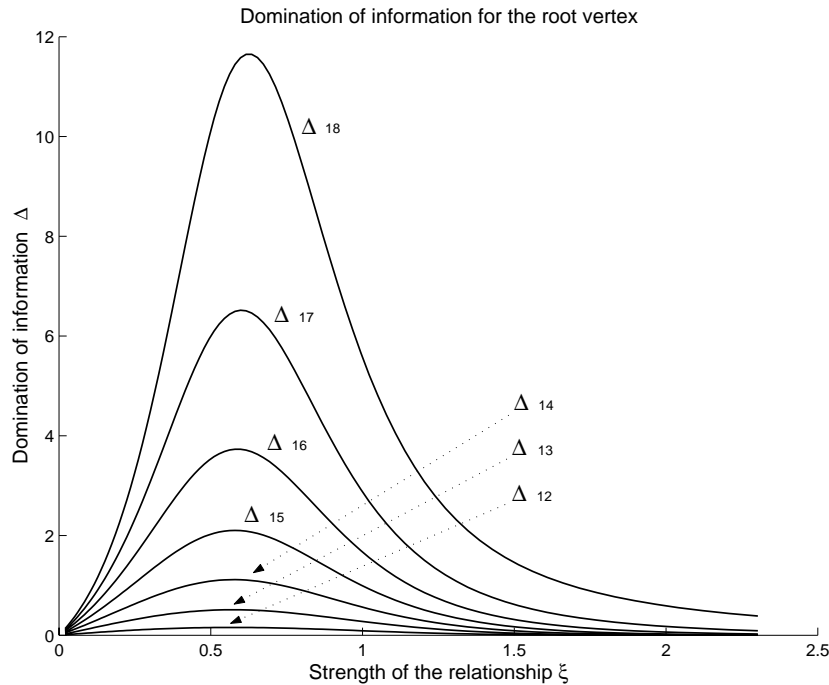


Figura 7.10. *Dominación de información del vértice raíz en un árbol truncado regular de profundidad $\Lambda = 8$ y grado $c = 4$. Puede observarse que la dominación toma un máximo para un valor de ξ próximo a 0.5, que se puede considerar como una fuerza de coordinación elevada.*

7.5 Conclusiones

Aunque haya algunas mejoras que pueden ser realizadas sobre el modelo, es importante comentar que un modelo tan simple de las relaciones humanas es capaz de explicar rasgos importantes que aparecen en las redes sociales como la existencia de una relación estrecha entre la estructura de la red y su eficiencia. Es también interesante comentar que la misma conclusión general puede ser obtenida con cualquier otro modelo simplemente asumiendo que el número de relaciones está limitado y que la propagación de información conlleva una degradación.

Incluso aunque el modelo explique algunas características notables de las redes sociales, hay varias inconsistencias que necesitan ser desarrolladas e investigadas con mayor profundidad. Una de ellas es relativa al problema de convergencia que aparece en la evaluación del grado de coordinación para algunas estructuras de red. Aunque esta divergencia pudiera ser interpretada como un síntoma de sobrecarga de información en la red, podría conducir a algunos problemas en la interpretación del modelo. En este sentido, sería interesante realizar algunas mejoras, principalmente en el modelado de la degradación de la información. Otro rasgo incompleto es la caracterización de la fuerza de coordinación ξ . Ha sido definida como una constante que depende de la naturaleza de la relación, pero una interpretación y un análisis

más profundos serían deseables.

Los modelos sociales usados aquí han sido escogidos por su simplicidad. No deben ser considerados como descripciones realistas de las interacciones entre las personas en comunidades y organizaciones. Modelos más desarrollados deberían tener en cuenta otros efectos diferentes como: fuerzas de relación diferentes, grados de distribución realistas (*scale free* [104], etc.), aristas dirigidas y ponderadas, etc.

En cualquier caso, el modelo propuesto introduce varios conceptos interesantes y novedosos que pueden ser de gran interés en el análisis de los flujos de información en redes sociales. A modo de ejemplo, hemos introducido un análisis detallado en redes jerárquicas, que son las más populares en empresas y otros tipos de organizaciones. Hemos mostrado que esta clase de topología beneficia principalmente a los niveles más altos, proporcionándolos una posición central superior y mejorando su dominio de la información. Más aun, demostramos que las estructuras jerárquicas no son óptimas en términos de eficiencia de la información, sino que en cambio, son el resultado del objetivo individual de maximizar la influencia que cada actor tiene dentro de la estructura.

Finalmente, queremos comentar que esta clase de acercamiento al problema del flujo de información en redes sociales puede ser muy importante para empresas, organizaciones y hasta consultoras. Por esta razón, sería muy interesante investigar la capacidad de esta clase de modelos para extraer roles y patrones de redes sociales reales. Esta clase de resultados podrían ser relevantes para la planificación de recursos humanos. En este sentido, la dificultad principal a la hora de realizar este tipo de investigación viene de la ausencia de metodologías fiables para obtener los datos en escenarios reales. Consiguientemente, este podría ser un punto de partida apropiado para desarrollar con mayor profundidad los modelos propuestos.

Capítulo 8

Redes complejas en los mercados de Internet

8.1 Introducción

Una de las carencias más importantes cuando las empresas planean el desarrollo de nuevos sitios web es la ausencia de modelos matemáticos realistas que proporcionen predicciones sobre el comportamiento de los mercados de Internet. De la misma manera que podemos encontrar modelos para diferentes fenómenos en la economía tradicional (modelos de equilibrio, de oferta y demanda, modelos de competitividad, etc.), podría ser útil desarrollar explicaciones matemáticas para los mercados de Internet. Con esta idea en mente, en este capítulo, nuestro objetivo es introducir un modelo de la dinámica competitiva de los mercados del World Wide Web (WWW). Algunos modelos similares ya han sido presentados en la literatura científica en los últimos años, principalmente describiendo la dinámica competitiva en Internet y otros fenómenos relacionados con el World Wide Web [120, 121, 122].

Para entender los aspectos esenciales del modelo que proponemos, es importante observar un número de características de los mercados que deseamos analizar. En primer lugar, obsérvese que el WWW es simplemente un conjunto de entidades, denominadas normalmente sitios web o portales, que compiten por un recurso limitado (los visitantes o clientes), respetando un conjunto de reglas predefinidas. Estas reglas vienen impuestas por la propia naturaleza de los mercados y son las que gobiernan las interacciones entre los sitios. En segundo lugar, es fundamental entender que estas interacciones tienen lugar de modos diferentes, dependiendo de las características particulares de los sitios que estén en competición. Por consiguiente, es necesario aceptar que, en un entorno realista de Internet, la topología que describe la red de estas interacciones debe tener una estructura compleja. Por estos motivos, cualquier descripción conveniente del mercado del WWW debe tener en cuenta estos dos aspectos: la descripción individual de la evolución dinámica de los sitios y la topología de interconexión de su red de interacción.

La evolución individual del tráfico en cada uno de los sitios es evaluada a través de un modelo basado en las ecuaciones de competitividad de Lotka-Volterra [120]. El objetivo del modelo es capturar los aspectos esenciales de los procesos competitivos que ocurren en Internet, permitiendo un mejor entendimiento de la dinámica

de los sitios. Por esta razón, este modelo es determinista y no considera ningún efecto aleatorio, lo que sería deseable para una descripción más realista. En cualquier caso, es notable que un modelo tan simplificado sea capaz de predecir algunas características importantes de los mercados [120]. Para una descripción completa de los efectos estocásticos en un modelo de Lotka-Volterra generalizado se puede consultar [123].

La topología de interconexión de la red de interacción debe ser descrita usando un instrumento matemático conveniente para la caracterización de estructuras complejas. Probablemente el marco más apropiado para lograr este objetivo es la teoría de grafos. La representación de la estructura competitiva del WWW a través de un grafo es bastante sencilla. Sólo es necesario considerar que cada uno de los sitios web es representado por un vértice en el grafo y que cualquier interacción entre dos sitios es representada por una arista.

Como puede observarse al examinar los argumentos precedentes, la teoría de redes complejas surge de manera espontánea como el marco más conveniente para desarrollar nuestro modelo. Los dos ingredientes básicos de una red compleja están presentes: un conjunto de entidades idénticas (los sitios web) y una topología de interconexión que describa su estructura relacional.

8.2 Descripción del modelo

Todo mercado del mundo real es lo suficientemente complicado como para no poder ser nunca explicado en su totalidad por un modelo matemático. Sin embargo, basándonos en las ideas presentadas en la sección precedente, mostraremos que es posible crear un modelo simple de segmentos aislados de mercados que presenten las características principales del verdadero comportamiento en Internet. Como ya hemos adelantado, el modelo que proponemos está inspirado en las ecuaciones de competitividad de Lotka-Volterra, que nos ayudarán a evaluar la evolución de la fracción de mercado controlada por cada sitio. Las ecuaciones Lotka-Volterra fueron desarrolladas en el marco de la ecología para predecir la evolución de especies en competencia. La idea fundamental que subyace tras ellas es que cuando no hay competencia, la población de una especie particular crece proporcionalmente al número de miembros preexistente, y disminuye proporcionalmente al cuadrado de ese número. Matemáticamente, para una especie particular i , la expresión siguiente es aplicable

$$\frac{df_i}{dt} = \alpha_i \beta_i f_i - \alpha_i f_i^2, \quad (8.1)$$

donde f_i es la población y α_i y β_i son constantes. Observe que el primer término de la ecuación, de algún modo, tiene en cuenta el número de nacimientos mientras que el segundo considera el número de miembros fallecidos. Cuando una segunda especie competidora j entra en juego, el modelo de Lotka-Volterra asume que el número de nuevas muertes producidas por esta competencia es proporcional al número de los miembros preexistentes de i multiplicado por el número de los miembros preexistentes

tes de j :

$$\frac{df_i}{dt} = \alpha_i \beta_i f_i - \alpha_i f_i^2 - \gamma_{ij} f_i f_j, \quad (8.2)$$

donde γ_{ij} es una constante usada para medir la fuerza de la competición.

Usando las mismas ideas, vamos a definir un modelo competitivo para los mercados del WWW en Internet. En la situación general, tenemos n competidores diferentes, de modo que el sistema viene descrito en términos de n ecuaciones diferenciales no lineales de la forma,

$$\frac{df_i}{dt} = f_i (\alpha_i \beta_i - \alpha_i f_i - \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} f_j), \quad (8.3)$$

donde f_i es la fracción de mercado que es cliente del sitio i , α_i es el índice de crecimiento y mide la capacidad que el sitio i tiene para crecer, β_i es la capacidad máxima, que está relacionada con el valor de saturación de f_i (el valor máximo que f_i puede alcanzar) y γ_{ij} es la tasa de competición entre los sitios i y j . En sentido estricto, el modelo ha sido desarrollado tomando f_i como la fracción de la población que es consciente de la existencia del sitio i , pero es lógico pensar que esta fracción debe estar relacionada con el número de visitas a i y, por tanto, con el número de clientes. Es importante entender que un usuario puede ser cliente, al mismo tiempo, de todos los sitios. Así, es posible encontrar segmentos de mercado en los que $f_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (lo que indicaría que el 100% de la población del mercado visita todos los sitios, o es consciente de la existencia de todos los sitios).

Es esencial comprender que este conjunto de ecuaciones define implícitamente una red compleja que determina el comportamiento de cada uno de los nodos y la topología de interconexión entre ellos. Observe que hay una ecuación correspondiente a la evolución dinámica de la fracción del mercado f_i de cualquiera de los sitios web dentro de la red. Cada una de estas ecuaciones tiene $n + 1$ términos. Los dos primeros describen la tendencia natural de la población a crecer ($\alpha_i \beta_i f_i$) y la competencia que cada sitio ejerce sobre sí mismo ($\alpha_i f_i f_i$). El resto de los términos está asociado con la competición (la interacción) del sitio con el resto de los rivales ($-\sum_{i \neq j} \gamma_{ij} f_i f_j$). Lo interesante, en este caso, es que el conjunto de constantes γ_{ij} define la topología de interconexión de la red de interacciones. Para entender por qué, es suficiente con observar que es posible escribir este término a través de la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & & & \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

donde la matriz del centro puede ser vista como la matriz de adyacencias de un grafo ponderado dirigido en el que el peso del arco que une los nodos i y j es γ_{ij} .

El parámetro α_i es denominado el *índice de crecimiento* de sitio i . Valores elevados de α_i implican un desarrollo rápido de los sitios dentro de un mercado. En

Internet, los sitios que tienen un crecimiento más rápido son aquellos que ofrecen contenidos más interesantes. Consiguientemente, podemos relacionar este parámetro con la calidad de los contenidos de los sitios web. Los sitios que tienen contenidos muy interesantes crecerán más rápido que los sitios que tengan contenidos de menor calidad o pasados de moda. A causa de esto, podemos definir α_i como la calidad de los contenidos del sitio i . Hay que hacer notar que no estamos interesados en saber cómo se mide α_i en un escenario real, en este punto, simplemente queremos destacar que cuanto mayor sea α_i , mayor será la calidad del sitio.

Al parámetro β_i se le ha denominado capacidad máxima de sitio i y determina la fracción máxima del mercado que un sitio dado puede alcanzar. La capacidad máxima está relacionada con el número de conexiones simultáneas que un sitio puede mantener. Para simplificar el modelo, podemos asumir que los sitios pueden poner al día su hardware y software lo suficientemente rápido como para no ser nunca sorprendidos por problemas de congestión. Por tanto, desde un punto de vista dinámico, los sitios se comportan como si tuviesen una capacidad máxima de 1, con lo que $\beta_i = 1$ en todos los casos para nuestro análisis.

Finalmente, el parámetro γ_{ij} ha sido denominado la tasa de competición entre los sitios i y j . La tasa de competición mide la fracción de clientes que i pierde debido a la existencia de j . Cuanto más fuerte sea la tasa de competición entre dos sitios, menor será la probabilidad de encontrar usuarios que sean clientes de ambos sitios a la vez (sean conscientes de la existencia de ambos sitios). La tasa de competición puede ser vista como una medida del grado de incompatibilidad entre los sitios. Esto significa que si dos sitios están en fuerte competición, entonces los clientes pueden visitar uno u otro, pero nunca ambos. Esto puede ser relacionado con la semejanza del contenido y los servicios ofrecidos por los sitios, un cliente raras veces visita dos sitios que tengan el mismo contenido y que ofrezcan los mismos servicios o productos. Para comercios electrónicos, el término servicio debe ser entendido en un sentido amplio, incluyendo precios, calidad de productos, etc. En este momento no estamos interesados en saber cómo este parámetro puede ser medido en un sitio web real, simplemente debemos hacer notar que γ tiene una influencia en el crecimiento del sitio, y que los sitios pueden modificar su tasa de competición modificando sus contenidos, servicios, productos, precios, etc. Asumimos que las tasas de competición entre dos sitios son simétricas ($\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$). Aunque esta hipótesis no sea necesariamente verificada en todos los mercados, es razonable pensar que bajo situaciones normales es válida. Una consecuencia muy importante de esta última suposición es que la matriz de adyacencias descrita en la Ec.(8.4) se hace simétrica. Esto significa que el grafo asociado se convierte en no dirigido.

Dependiendo de la estructura del grafo asociado a la red de competitividad, el análisis del modelo, para el caso general de n competidores, puede ser fácil, difícil o imposible. Por ejemplo, cuando la topología considerada es absolutamente regular (todos los γ_{ij} son idénticos), el grafo es no ponderado y tenemos una situación completamente simétrica en la que la estabilidad del modelo puede ser evaluada analíticamente. Sin embargo, si consideramos un mercado con tasas de competición diferentes, el caso general de n competidores no es manejable. Lamentablemente,

esta es la situación más interesante y rica y no podemos permitirnos pasarla por alto sin tratar de obtener tanta información como sea posible sobre su dinámica. Por esta razón, en ocasiones, va a ser necesario aceptar una suposición restrictiva y reducir el análisis de la dinámica competitiva a un segmento de mercado de sólo tres competidores. Esta suposición nos va a permitir recuperar comportamientos nuevos y es lo suficientemente simple como para ser tratada analíticamente en los casos más interesantes. Esta restricción también puede ser interpretada como un modelo de mercado compuesto sólo por tres competidores o considerando que el resto no interfiere en la dinámica de los tres más importantes. Por tanto, el modelo que usaremos para describir la dinámica competitiva en este tipo de segmentos de mercado vendrá dado por

$$\begin{cases} \dot{f}_1 = f_1(\alpha_1 - \alpha_1 f_1 - \gamma_{12} f_2 - \gamma_{13} f_3) \\ \dot{f}_2 = f_2(\alpha_2 - \alpha_2 f_2 - \gamma_{21} f_1 - \gamma_{23} f_3) \\ \dot{f}_3 = f_3(\alpha_3 - \alpha_3 f_3 - \gamma_{31} f_1 - \gamma_{32} f_2), \end{cases} \quad (8.5)$$

que puede ser visto como una red compleja de elementos que interactúan entre sí, en la que la topología asociada está descrita por un grafo ponderado no dirigido de tres vértices. Este modelo de tres variables es el más simple capaz de considerar, al mismo tiempo, condiciones de colaboración y de competición y de ahí que lo usemos en este trabajo.

8.3 Clasificación de los mercados

Dependiendo de la estructura de la red y de los valores de los parámetros que definen la evolución dinámica, podemos definir diferentes tipos de mercados. Sin embargo, antes de hacerlo, es necesario introducir algunas definiciones:

- Decimos que el sitio i está en *fuerte competición* con el sitio j cuando $\gamma_{ij} > \alpha_i$.
- Decimos que el sitio j *colabora* con el sitio i cuando $\gamma_{ij} < \alpha_i$. Es importante hacer notar que, rigurosamente hablando, el modelo no contempla ningún fenómeno de verdadera colaboración entre sitios. Sin embargo, bajo tasas de competición bajas, los sitios son capaces de desarrollarse siguiendo su propia dinámica y no siendo interferidos por ningún otro rival, lo que podría ser visto como una especie de colaboración por no interferencia.
- Un conjunto de sitios forman una *alianza* cuando están en condiciones de colaboración entre sí, pero en condiciones de fuerte competición con el resto de los rivales.
- Un mercado dado presenta un *sitio ganador* cuando en él existe un sitio $i \in \{1, \dots, n\}$ que verifica $f_i = 1$ y $f_j = 0$ para todo $j \neq i$. De la misma manera, un mercado dado presenta una *alianza ganadora* cuando en ella existe una alianza

que verifica $f_i > 0$ para todos los sitios que pertenecen a la alianza y $f_i = 0$ para el resto.

- Decimos que un sitio *gana* en un mercado cuando es un sitio ganador o pertenece a una alianza ganadora.

Nuestro interés está especialmente concentrado en tres clases particulares de mercado que son las siguientes.

1. *Mercados completamente colaborativos.* En esta clase de mercados todos los competidores colaboran (están en condiciones de competición débil). Esta clase de mercado permite que todos los competidores coexistan manteniendo cada uno una fracción del mercado, lo cual significa que todos los sitios ganan. La fracción de mercado que alcance cada sitio va a depender, a veces de las características del mercado y, a veces, de las características del mercado y de la condición inicial de los sitios. En condiciones de competición completamente simétricas, (todos los γ_{ij} son iguales), la estructura asociada vendrá descrita por un grafo no dirigido completamente conectado.
2. *Mercados completamente competitivos.* En esta clase de mercados todos los competidores están en condiciones de fuerte competición. Se sabe que en este tipo de mercados aparece una característica *winner-take-all* [124], es decir, en ellos existe un único sitio ganador. Obsérvese que en condiciones de simetría completa, la estructura de este tipo de redes también está descrita por un grafo no dirigido y completamente conectado.
3. *Mercados mixtos.* Esta clase de mercados presenta la particularidad de que algunos competidores colaboran, pero mantienen, al mismo tiempo, condiciones de fuerte competición con el resto de los rivales. En esta situación, la dinámica competitiva puede mostrar un conjunto muy diverso de comportamientos. Un análisis exhaustivo de la estabilidad de los puntos fijos de las ecuaciones será realizado más tarde para expresar formalmente los resultados. Estos mercados pueden presentar una alianza ganadora. En este caso, la topología de interconexión deja de ser regular porque es imprescindible que los pesos (γ_{ij}) de las aristas tengan valores diferentes, en este caso, las estructuras permitidas son más numerosas y ricas.

Una vez que hemos introducido las diferentes clases de mercados, una pregunta interesante es la de determinar cómo un sitio puede conseguir ganar en un mercado. Hay dos factores principales que lo determinan: primero, la clase de mercado (el conjunto de parámetros que están implicados en las ecuaciones) y segundo, las condiciones iniciales de los competidores. La condición inicial de un sitio i es la fracción del mercado que es consciente de la existencia del sitio i en el instante inicial ($f_i(0)$). Toda la historia pasada del mercado es representada a través de las condiciones iniciales de sus miembros. Cuando un sitio comienza a ofrecer sus servicios en un

instante $t = 0$, la condición inicial puede ser diferente del cero si el sitio ha promovido sus contenidos a través de una campaña de marketing. La condición inicial también puede ser no nula cuando el sitio existe antes del instante de partida y ya tiene una fracción del mercado como cliente.

8.4 Análisis matemático del modelo

Para comprender en profundidad las predicciones del modelo, es necesario realizar un análisis de los puntos fijos y de su estabilidad. El caso general de n competidores puede ser resuelto solamente si se acepta que los índices de crecimiento y las tasas de competición de todos los sitios son idénticos ($\alpha_i = \alpha$ y $\gamma_{ij} = \gamma$ para todo i). Estas suposiciones implican condiciones de simetría completa, que en términos topológicos, se traducen en grafos regulares totalmente conectados. Sin embargo, como explicamos anteriormente, esta clase de estructura no puede presentar una situación mixta. Para poder analizar mercados mixtos es necesario concentrar los esfuerzos en el problema de tres competidores, que se puede resolver analíticamente en condiciones bastante generales.

Tomando el modelo de tres competidores, descrito por la expresión dada en la Ec.(8.5), podemos realizar un análisis de la estabilidad, encontrando que existen 8 puntos fijos que son:

- La solución trivial $P_0 = (0, 0, 0)$.
- Tres puntos fijos P_1, P_2 y P_3 correspondientes a la situación en la que el mercado presenta un sitio ganador. Es decir, uno de los sitios llega a controlar completamente el mercado y el resto de los competidores desaparece. Estos puntos fijos son: $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$ y $P_3 = (0, 0, 1)$.
- Tres puntos fijos P_{12}, P_{13} y P_{23} que corresponden con la situación en la que una alianza de dos sitios triunfa, haciendo que el tercer sitio desaparezca. Estos puntos fijos son: $P_{12} = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2}, \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2}, 0 \right)$, $P_{13} = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_3 \gamma_{13}}{\alpha_1 \alpha_3 - \gamma_{13}^2}, 0, \frac{\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_1 \gamma_{13}}{\alpha_1 \alpha_3 - \gamma_{13}^2} \right)$ y $P_{23} = \left(0, \frac{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_3 \gamma_{23}}{\alpha_2 \alpha_3 - \gamma_{23}^2}, \frac{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2 \gamma_{23}}{\alpha_2 \alpha_3 - \gamma_{23}^2} \right)$. Observe que la notación de los puntos fijos indica los sitios que ganan en el mercado. Es importante comentar que esos puntos fijos tienen sentido sólo en el caso no degenerado. Por ejemplo, la solución para el punto P_{12} , será significativa sólo cuando $\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2 \neq 0$. Cuando esta ecuación sea cero, tendremos un número infinito de puntos fijos distribuidos sobre una línea recta en la que la alianza entre los sitios 1 y 2 vence al sitio 3, haciendo que este último desaparezca. Aunque esta circunstancia pueda ocurrir, es importante destacar que las propiedades fundamentales de los puntos fijos son idénticas.
- Por último, tenemos un punto fijo que corresponde a la situación en la que los 3 sitios coexisten $P_{123} = (z_1, z_2, z_3)$, donde z_1, z_2, z_3 es la solución del sistema

de ecuaciones lineales siguiente

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 z_1 + \gamma_{12} z_2 + \gamma_{13} z_3 \\ \alpha_2 = \gamma_{21} z_1 + \alpha_2 z_2 + \gamma_{23} z_3 \\ \alpha_3 = \gamma_{13} z_1 + \gamma_{23} z_2 + \alpha_3 z_3. \end{cases} \quad (8.6)$$

Puede observarse que el punto fijo es realmente un solo punto cuando las tres ecuaciones son linealmente independientes. Si tenemos sólo 2 ecuaciones independientes, conseguimos una línea unidimensional de puntos fijos y si tenemos sólo una ecuación independiente, obtenemos un plano de puntos fijos. Sin embargo, lo importante es que todos estos puntos fijos tienen la característica de permitir que los tres competidores sobrevivan controlando cada uno una fracción del segmento de mercado.

Para analizar la estabilidad de los puntos fijos debemos calcular la matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 - 2\alpha_1 x_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 & -\gamma_{12} x_1 & -\gamma_{13} x_2 \\ -\gamma_{21} x_2 & \alpha_2 - 2\alpha_2 x_2 - \gamma_{21} x_1 - \gamma_{23} x_3 & -\gamma_{23} x_2 \\ -\gamma_{31} x_3 & -\gamma_{32} x_3 & \alpha_3 - 2\alpha_3 x_3 - \gamma_{31} x_1 - \gamma_{32} x_2 \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

donde x_1 , x_2 y x_3 son los valores de las fracciones de mercado controladas por cada competidor. En cuanto a la estabilidad, si calculamos los valores propios de la matriz Jacobiana para cada punto fijo obtenemos lo siguiente.

- Para el punto fijo $P_0 = (0, 0, 0)$ los valores propios del Jacobiano son $\zeta_1 = \alpha_1$, $\zeta_2 = \alpha_2$ y $\zeta_3 = \alpha_3$. Como todos los valores propios son positivos, este punto fijo es siempre inestable.
- En cuanto a los tres puntos fijos de la forma P_i con $i = 1, 2, 3$ se obtiene el resultado siguiente. Para $P_1 = (1, 0, 0)$ los valores propios de la matriz Jacobian son

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\alpha_1 \\ \zeta_2 &= \alpha_2 - \gamma_{21} \\ \zeta_3 &= \alpha_3 - \gamma_{31}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

por tanto, este punto fijo es estable sólo cuando el sitio 1 está en fuerte competición con el sitio 2 y con el sitio 3 simultáneamente. La conclusión que podemos extraer es que el único camino que 1 tiene para ganar en el mercado es el de competir fuertemente con el resto de los rivales. En un mercado completamente competitivo este punto fijo es estable. Es importante hacer notar que el parámetro γ_{23} no afecta a la estabilidad de este punto fijo, por tanto, también puede ser estable en una situación de mercado mixto, cuando los sitios 2 y 3 estén aliados. Para los otros dos puntos fijos, los resultados son análogos. En cuanto a $P_2 = (0, 1, 0)$ los valores propios son

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\alpha_2 \\ \zeta_2 &= \alpha_1 - \gamma_{12} \\ \zeta_3 &= \alpha_3 - \gamma_{32}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

y para $P_3 = (0, 0, 1)$ el valor propio es

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= -\alpha_3 \\ \zeta_2 &= \alpha_2 - \gamma_{23} \\ \zeta_3 &= \alpha_1 - \gamma_{13}.\end{aligned}\tag{8.10}$$

- En referencia a los tres puntos fijos de la forma P_{ij} tenemos en cuenta sólo el caso no degenerado, aunque estos resultados podrían ser generalizados para cubrir todas las circunstancias posibles. Vamos a analizar el punto fijo P_{12} detalladamente. Este análisis puede ser generalizado para los otros dos casos. Ya sabemos que $P_{12} = \left(\frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\gamma_{12}}{\alpha_1\alpha_2 - \gamma_{12}^2}, \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_{12}}{\alpha_1\alpha_2 - \gamma_{12}^2}, 0 \right)$. El cálculo de los valores propios de la matriz Jacobiana en esta situación es poco práctico en el caso general, sin embargo podemos hacer un número de suposiciones encaminadas a facilitar esta tarea. Sabemos que este punto fijo es interesante sólo en caso de que tengamos una alianza entre los sitios 1 y 2 contra el sitio 3. En tales circunstancias, podríamos considerar que todos los sitios tienen el mismo índice de crecimiento ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$). Además, como los sitios 1 y 2 están aliados contra el sitio 3, es lógico pensar que ambos presenten la misma tasa de competición contra su rival ($\gamma_{31} = \gamma_{32} = \gamma$). El parámetro γ_{12} , que mide el grado de alianza entre sitios 1 y 2, es independiente del resto. Cuanto menor sea el valor de este parámetro, mayor será el grado de alianza. Aceptando estas restricciones, podemos calcular los valores propios de la matriz jacobiana que son

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \frac{\alpha}{\alpha + \gamma_{12}}(\alpha + \gamma_{12} - 2\gamma) \\ \zeta_{2,3} &= \frac{\alpha}{\alpha + \gamma_{12}}(-\alpha \pm \gamma_{12}i).\end{aligned}\tag{8.11}$$

Obsérvese que $\zeta_{2,3}$ forma un par de soluciones complejas conjugadas, por lo que seguimos teniendo 3 valores propios para el Jacobiano. Aunque este análisis no sea general, podemos obtener una conclusión interesante del mismo. Los puntos fijos P_3 y P_{12} pueden coexistir en ciertas condiciones de competición. Por ejemplo, si tomamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 2\alpha$ y $\gamma_{12} = \frac{\alpha}{2}$. En este caso particular, a través de la Ec.(8.8) y de la Ec.(8.11), podemos determinar que tanto el punto fijo P_{12} como el P_3 son estables. Sin embargo, el punto fijo P_{12} no es compatible con un mercado *winner-take-all*. Esto demuestra que bajo condiciones asimétricas de competición, la característica *winner-take-all* desaparece. Nuestras simulaciones numéricas corroboran que esta situación se mantiene en mercados que tengan más de 3 competidores y con condiciones de competición menos restrictivas. Para los puntos fijos P_{13} y P_{23} se puede llegar a conclusiones equivalentes.

- En cuanto al punto fijo P_{123} , el análisis es mucho más complejo. No es posible calcular los valores propios de la matriz jacobiana en el caso general. Para extraer alguna información sobre la estabilidad de los puntos fijos es necesario hacer suposiciones muy restrictivas como simetría completa en las tasas de competición y en los índices de crecimiento. Un análisis completo de esta

situación en el caso general de n competidores ha sido realizado en [120]. Para nosotros, lo más relevante en este caso es observar que, al menos en el caso de simetría completa, este punto fijo es estable sólo en condiciones de colaboración completa y es inestable en condiciones de fuerte competición. Las condiciones de competición mixtas no son posibles en una situación de competición completa. En cualquier caso, los resultados numéricos muestran que este punto fijo no puede ser nunca estable en mercados mixtos incluso cuando los parámetros no son simétricos. Matemáticamente, para el caso de 3 competidores, asumiendo condiciones completamente simétricas ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma$), este punto fijo puede ser expresado como: $P_{123} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+2\gamma}, \frac{\alpha}{\alpha+2\gamma}, \frac{\alpha}{\alpha+2\gamma} \right)$ y podemos afirmar que P_{123} es estable si $\gamma < \alpha$ e inestable en el resto de los casos.

8.5 Análisis de los Mercados de Internet

En esta sección intentamos analizar todos los tipos de mercados que el modelo predice para las diferentes familias de parámetros. Para simplificar, usaremos el modelo de tres competidores, pero la mayor parte de los resultados que mostramos son también aplicables para el caso general de n . Tras un análisis cuidadoso del modelo, podemos notar que hay tres clases fundamentales de mercados que describimos a continuación.

8.5.1 Mercados completamente colaborativos

Esta clase de mercado tiene la particularidad de presentar tasas de competición bajas en todos los sitios. Para simplificar el análisis, podemos considerar una situación completamente simétrica. Esto significa que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ y $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma$. El punto fijo P_0 es siempre inestable, en esta situación los puntos fijos P_1, P_2 y P_3 también serán inestables porque el autovalor ζ_3 será mayor que cero, Ecs.(8.8-8.9-8.10). Encontramos la misma situación para los puntos fijos P_{12}, P_{13} y P_{23} , Ec.(8.11), porque el valor propio ζ_1 será mayor que el cero. Entonces, el único punto fijo estable es P_{123} que tiene todos los valores propios por debajo de cero. Así, en un mercado en colaboración completa todos los competidores pueden coexistir teniendo cada uno una fracción del segmento. Lo realmente interesante en este caso es que, para el caso no degenerado, el valor a largo plazo de la fracción del mercado controlado por cada sitio no depende de la condición inicial de los sitios, sino sólo del valor que tomen las tasas de competición y los índices de crecimiento. Por consiguiente, en este tipo de mercados, la inversión inicial no tendrá una influencia sobre la porción de mercado controlada por cada sitio a largo plazo. Podemos ver en la Fig. 8.1 la evolución en el tiempo de un segmento de mercado que tiene tres competidores en situación de colaboración completa. Como se muestra en esta figura, todos los sitios convergen a una misma fracción de mercado. Así, el sitio 3, que comienza con 60% de la población, a largo plazo, tiene el mismo beneficio que el sitio 1, que comienza sólo con 10% de cuota.

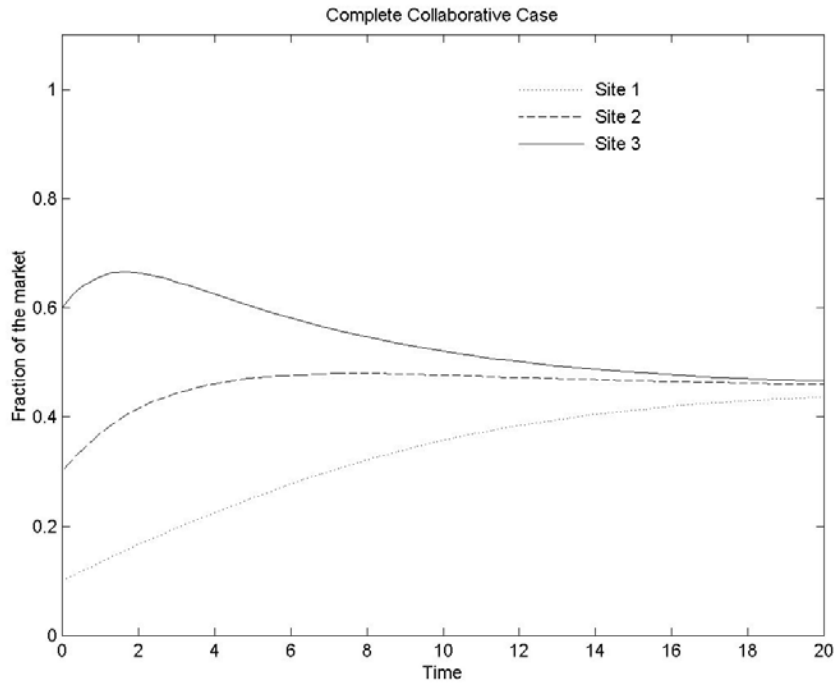


Figura 8.1. Mercado completamente colaborativo, caso no degenerado. A largo plazo, todos los sitios convergen a la misma fracción de mercado. Parámetros: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma_{ij} = 0.6$ (para todo i y j). Condiciones iniciales: $f_1(0) = 0.1$, $f_2(0) = 0.3$, $f_3(0) = 0.6$.

8.5.2 Mercados completamente competitivos

Esta clase particular de mercado puede ser analizada en condiciones de simetría completa. Es posible demostrar que, en estas condiciones, aparece una característica *winner-take-all*. Así, los únicos puntos fijos estables son P_1 , P_2 y P_3 . Las condiciones iniciales son las que determinan qué competidor terminará ganando. El sitio que tenga la condición inicial más alta conseguirá controlar todo el mercado mientras que los demás desaparecerán. Por tanto, en esta clase de mercados con condiciones de simetría completa, el factor principal que determina el éxito de un sitio es la inversión inicial en marketing. Si los parámetros del modelo dejan de ser simétricos, esta regla deja de ser válida. Por ejemplo, si la calidad de los contenidos (el índice de crecimiento) de un sitio es mejor que la de los demás, ese sitio puede ganar y hacer que el resto de competidores desaparecen, incluso si su inversión inicial es débil. La Fig. 8.2 muestra la evolución temporal de un mercado de este tipo en el que el sitio que parte de la condición inicial más elevada vence y el resto de los competidores desaparecen.

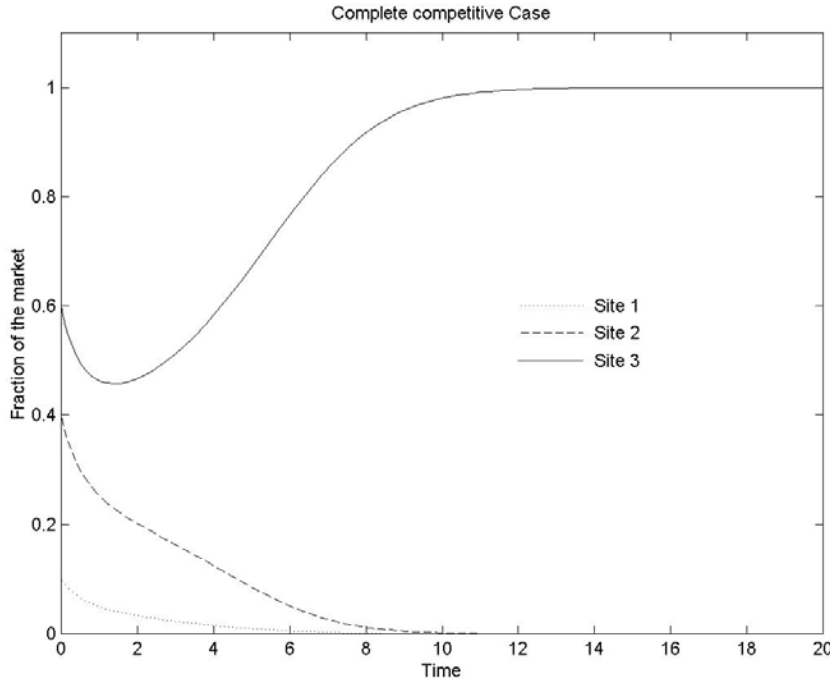


Figura 8.2. *Caso completamente competitivo. El mercado presenta una característica winner-take-all. Parámetros: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma_{ij} = 2$ (para todo i y j). Condiciones iniciales: $f_1(0) = 0.1$, $f_2(0) = 0.4$, $f_3(0) = 0.6$.*

8.5.3 Mercados Mixtos

Como ya adelantamos, este es el tipo de mercado más interesante de nuestro análisis. En este caso, los mercados tienen la particularidad de exponer tasas de competición bajas entre algunos sitios y condiciones de fuerte competición entre otros. Por tanto, en un mercado mixto, debe existir al menos una alianza entre sitios. Así, en el modelo simplificado de 3 competidores, un mercado mixto debe estar compuesto de 2 sitios que colaboran contra un tercer rival. En la mayor parte de los ejemplos que presentamos, asumimos que los sitios 1 y 2 están aliados contra el sitio 3. Para simplificar el análisis, fijamos los parámetros de la ecuación a los valores siguientes, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} < \alpha$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = \gamma > \alpha$. Esto implica que los sitios 1 y 2 tienen una alianza, los sitios 1 y 3 están en condiciones de fuerte competición y los sitios 2 y 3 también están en condiciones de fuerte competición. Puede probarse a través de las Ecs.(8.8-8.9-8.10-8.11) que los únicos puntos fijos estables en esta situación son, $P_3 = (0, 0, 1)$ y $P_{12} = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2}, \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2}, 0 \right)$. Como puede observarse, en este caso, el mercado ya no presenta la característica *winner-take-all* porque, dado que el punto fijo P_{12} es estable, los sitios 1 y 2 pueden coexistir al mismo tiempo haciendo que el sitio 3 desaparezca. Esta evolución depende de varios parámetros: las condiciones iniciales de los sitios, el grado de alianza, el gra-

do de competición contra el tercer rival y los índices de crecimiento de los sitios. Este conjunto de parámetros define la estrategia apropiada para hacer al mercado converger al punto fijo de nuestro interés. La Fig. 8.3 muestra una situación en la que los sitios 1 y 2 están aliados y su acción destruye a un rival más poderoso. Este fenómeno es producido por la colaboración de los dos sitios más débiles. Como puede ser observado en la Fig. 8.4, usando las mismas ecuaciones, pero haciendo que la alianza desaparezca, el sitio 3 gana y en el mercado vuelve a aparecer una característica *winner-take-all*.

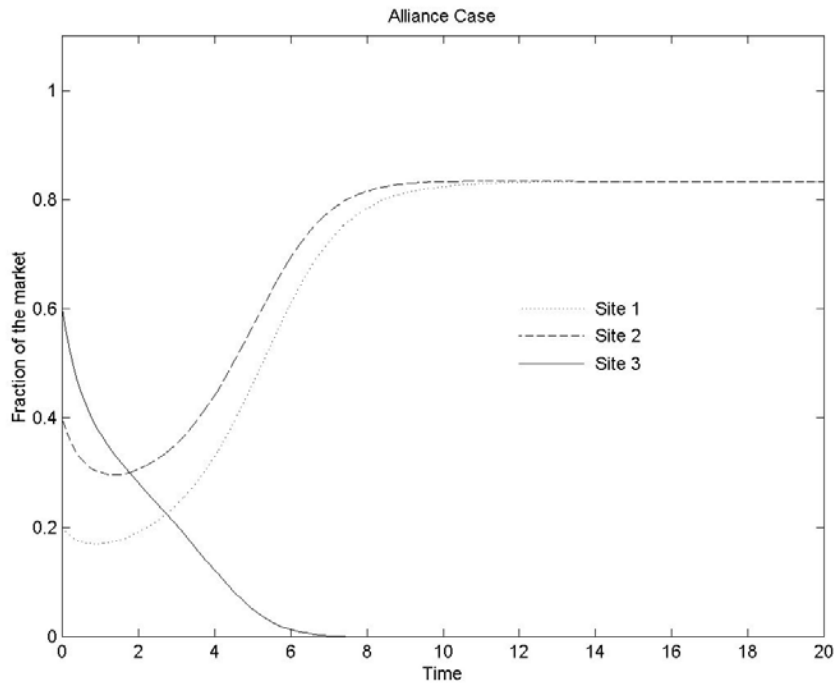


Figura 8.3. Mercado mixto. La alianza ente los sitios 1 y 2 vence al sitio 3. Parámetros: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 0.2$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = 2$. Condiciones iniciales: $f_1(0) = 0.2$, $f_2(0) = 0.4$, $f_3(0) = 0.6$.

8.6 Definición de estrategias para vencer en los mercados de Internet

Una vez que hemos analizado los diferentes tipos de mercado y su estabilidad, podemos usar los resultados obtenidos para definir qué conjunto de medidas debe tomar un sitio para conseguir un beneficio máximo en un segmento de mercado. El problema que nos planteamos es el siguiente: tenemos un sitio en Internet, o queremos desarrollar uno, y es necesario definir la estrategia para ganar. Desde un punto de vista pragmático, podemos pensar que las personas que crean sitios web desean

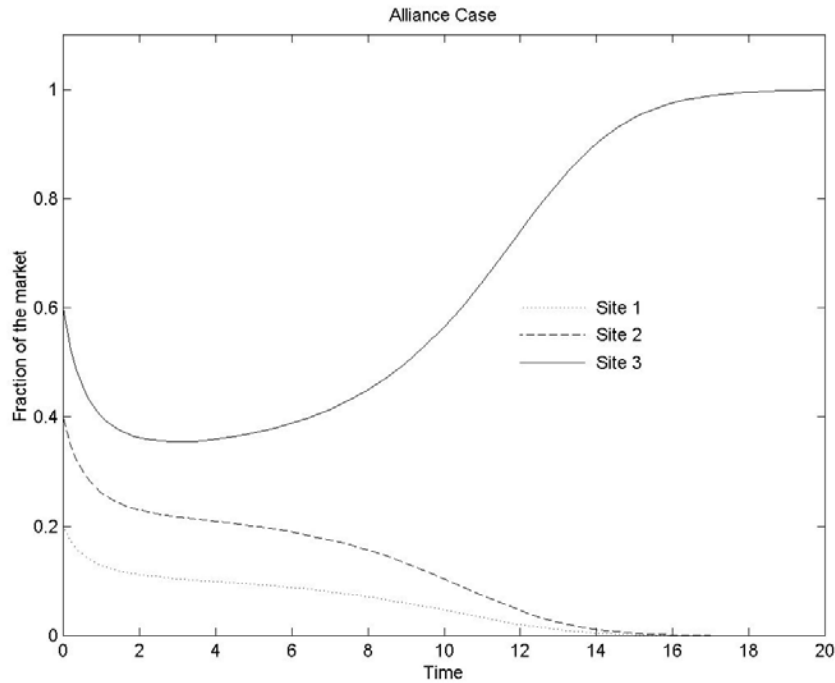


Figura 8.4. La alianza entre los sitios 1 y 2 ha desaparecido, el sitio 3 vence. Parámetros: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 1.1$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{23} = \gamma_{32} = 2$. Condiciones iniciales: $f_1(0) = 0.2$, $f_2(0) = 0.4$, $f_3(0) = 0.6$.

ganar dinero con ellos. En Internet, el dinero que un sitio obtiene depende directamente del número de conexiones recibidas por el sitio. Si el sitio es un comercio electrónico, podemos asumir como primera aproximación que cada persona que entra en el sitio tiene una probabilidad fija p de comprar algo, por tanto, cuanto mayor sea el número de conexiones mayor será también el de clientes. Para un sitio que adquiere sus ingresos por marketing, la situación es similar: el dinero que las empresas contratantes de publicidad dan al sitio es proporcional al número de conexiones recibidas. Consiguientemente, es razonable considerar que por cada conexión el sitio recibe una cantidad de dinero. Maximizar el beneficio es, por tanto, cuestión de maximizar el número de conexiones que el sitio recibe. Esta es la razón por la que decimos que un sitio gana cuando consigue todas las conexiones en su segmento de mercado y el resto no recibe ninguna.

En relación con la condición inicial, es razonable pensar que está estrechamente relacionada con la inversión que sería necesaria para lograr que una fracción de mercado equivalente estuviese al corriente de la existencia de un nuevo sitio web. Por tanto esta condición inicial mide, en cierto modo, el valor corriente de un sitio en términos de cuota de mercado.

8.7 Estrategias para el sitio más poderoso

El sitio más poderoso es el que tiene la condición inicial más alta. Imaginemos, por ejemplo, que partimos de un sitio llamado *power1.com* y queremos definir la estrategia a seguir. Asumiendo que nos encontramos en el instante inicial, la condición inicial del sitio es la fracción de mercado consciente de la existencia de *power1.com*. Su grado de competición con otros sitios y su índice de crecimiento son parte de su estrategia. Partiendo de estas bases, vamos a tratar de analizar cuál es el mejor tipo de mercado para el sitio *power1.com*.

8.7.1 Mercados completamente colaborativos

Asumamos que *power1.com* está en un mercado completamente colaborativo y que decide también colaborar. Utilizando el modelo general de n sitios con simetría completa, podemos deducir que el único punto fijo estable es el que hace que todos los sitios controlen una fracción del mercado $f_i = \frac{\alpha}{\alpha + (n-1)\gamma}$. Esto indica que, independientemente de las condiciones iniciales, todos los competidores obtendrán el mismo beneficio. Más aun, si un nuevo sitio entra en este segmento, todos los demás sitios, incluyendo *power1.com*, verán como disminuye su beneficio (obsérvese que n está colocado en el denominador). Esta situación no es óptima para *power1.com*, porque los ingresos dependen fuertemente del comportamiento del resto. Además, no puede alcanzar el máximo beneficio posible porque el valor de f_i en esa ecuación es 1 solamente cuando $\gamma = 0$. Consiguientemente, *power1.com* sólo conseguirá el 100% del mercado cuando el resto de sus rivales no compitan en absoluto. Además, a largo plazo, todos los sitios tendrán el mismo beneficio que *power1.com* independientemente de las inversiones iniciales. Por tanto, podemos entender que *power1.com* puede estar interesado en reorientar su estrategia tratando de presentar tasas de competición más elevadas.

8.7.2 Mercados mixtos

Los mercados mixtos son más difíciles de analizar. Por este motivo, es necesario asumir el modelo simplificado de 3 competidores. Considerando que *power1.com* es el sitio 1 del modelo, podemos suponer que este establece una lianza con el sitio 2 en contra del sitio 3. Nuevamente suponemos que *power1.com* es el sitio más poderoso del mercado. En esta situación, los únicos puntos fijos estables son $P_3 = (0, 0, 1)$, y $P_{12} = \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2}, \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2}, 0 \right)$. Bajo estas circunstancias, es muy probable que el mercado converja al punto fijo P_{12} (sería difícil que 3 venciera a la alianza de dos rivales más poderosos). Por tanto, a largo plazo, los sitios 1 y 2 se harán igualmente poderosos. Además, el beneficio de sitio 1 no será necesariamente el máximo posible porque $\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \gamma_{12}}{\alpha_1 \alpha_2 - \gamma_{12}^2} \leq 1$ dado que $\gamma_{12} < \alpha_2$. Consiguientemente, esta situación no es óptima para *power1.com*.

8.7.3 Mercados completamente competitivos

Supongamos ahora que *power1.com* se establece en un mercado completamente competitivo y decide también competir con los demás. Conforme al modelo de n competidores con simetría completa, tenemos n puntos fijos de la forma $P_i(0\dots1\dots0)$. Como ya sabemos, esto es un síntoma de mercado con característica *winner-take-all*. En esta situación, el punto fijo estable al que converja el sistema será aquél que haga que el sitio que parta de la condición inicial más elevada gane y que los demás desaparezcan. En nuestro caso de interés, esto significa que *power1.com* venza, controlando completamente el mercado y haciendo que el resto de los rivales desaparezcan a largo plazo. Por tanto, es obvio que, según el modelo, la estrategia más apropiada para el sitio más poderoso es la de tratar que el mercado sea lo más competitivo posible.

8.8 Estrategias para pequeños sitios web

Cuando nuestro sitio no es el más poderoso, la estrategia a seguir debe ser definida examinando cuidadosamente las características de cada mercado particular. Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que para cada tipo de mercado existe una estrategia óptima.

8.8.1 Mercados completamente colaborativos

Imaginemos ahora que tenemos un pequeño sitio llamado *small1.com* que no es el más poderoso de su segmento. En esta situación, podemos entrar en un mercado en el que todos los sitios están en colaboración. Tenemos dos opciones, competir o colaborar con todos ellos. La primera no será analizada, porque conduce claramente a un resultado adverso. La segunda opción es más interesante porque ya sabemos que, en el caso de n sitios con condiciones de simetría completa, el único punto fijo estable es el que hace que todos los sitios alcancen una fracción de mercado $f_i = \frac{\alpha}{\alpha + (n-1)\gamma}$. Esto significa que nuestro sitio consigue la misma fracción de mercado que el resto de los competidores. Cuanto más baja sea la condición inicial de nuestro sitio con respecto a la de los demás, mayor será el interés que presente este tipo de mercado. Por tanto, una estrategia apropiada para los sitios pequeños es la de orientarse hacia mercados en colaboración completa.

8.8.2 Mercados completamente competitivos

Podemos encontrarnos esta situación cuando entremos en un mercado donde todos los competidores estén en condiciones de fuerte competición. Nuestro sitio web sólo tiene dos posibilidades, competir o colaborar. Dado que nuestro sitio web no es el más poderoso, la primera opción conduce irremisiblemente hacia la desaparición de nuestro pequeño sitio. Por tanto, la única opción viable es la de colaborar. Analizaremos en detalle esta situación en la sección siguiente.

8.9 Haciendo alianzas

En esta sección nos vamos a concentrar en el análisis de la situación en la que dos pequeños sitios que colaboran entre sí (1 y 2), están en condiciones de competición frente a un tercer rival más poderoso (3). En este caso, la cuestión es la de determinar cuáles son las posibilidades que tiene esa alianza de vencer al sitio 3. Asumiendo una configuración parcialmente simétrica, los únicos puntos fijos estables son (Ec.(8.10) y Ec.(8.11)): $P_3 = (0, 0, 1)$ y $P_{12} = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma_u n}, \frac{\alpha}{\alpha + \gamma_u n}, 0\right)$, que corresponden respectivamente con la victoria del sitio más poderoso y de la alianza. En el caso general, no es posible calcular analíticamente cuál es el punto de convergencia del mercado. No obstante, nuestro sentido común y algunas simulaciones numéricas pueden permitirnos determinar la estrategia más apropiada. Obsérvese que el elemento más importante, que determina el punto de convergencia, son las condiciones iniciales de los sitios. Con esta idea en mente, podemos dividir el problema en dos subproblemas. Primero, consideraremos el caso en el que la suma de las condiciones iniciales de los sitios 1 y 2 es más elevada que la del sitio 3. Esto indica que el sitio 3 es el más poderoso, pero no es tan poderoso como la unión de los sitios que componen la alianza. En segundo lugar, consideraremos la situación en la que el sitio 3 es tan poderoso que supera a los sitios 1 y 2 juntos. En ambos casos, el modelo muestra comportamientos interesantes.

8.9.1 La unión de 1 y 2 es más poderosa que 3

Encontramos esta situación cuando la condición inicial del sitio 1 más la condición inicial del sitio 2 es mayor que la condición inicial del sitio 3. En La Fig. 8.5, podemos ver una serie de imágenes, en las que cada pixel representa el resultado obtenido por un sitio web después de un cierto tiempo de integración para un conjunto particular de condiciones iniciales y valores de los parámetros. Un pixel blanco indica que el sitio controla una fracción del mercado de 1, un pixel negro indica que el sitio tiene una fracción del mercado de 0. Un pixel gris representa un valor entre 0 y 1, cuanto más blanco es el pixel más cerca está su valor a 1, cuanto más negro, más cerca de 0. La figura muestra que cuando la colaboración en la alianza es lo suficientemente fuerte, esta vence.

8.9.2 La unión de 1 y 2 es menos poderosa que 3

En esta situación se considera el caso en el que la condición inicial de la alianza es más pequeña que la condición inicial de 3. En principio, en este caso, la intuición nos sugiere que lo más lógico es que el sitio 3 gane en todas las circunstancias. Sin embargo, esto está lejos de las predicciones del modelo. La serie de imágenes mostradas en la Fig. 8.6 ponen de manifiesto un comportamiento interesante. Cuando los sitios 1 y 2 están fuertemente aliados y sus condiciones de competición con el sitio 3 no son demasiado elevadas, la alianza puede llegar a vencer, incluso si la suma de sus condiciones iniciales es inferior a la del sitio 3. La Fig. 8.7 ilustra el comportamiento

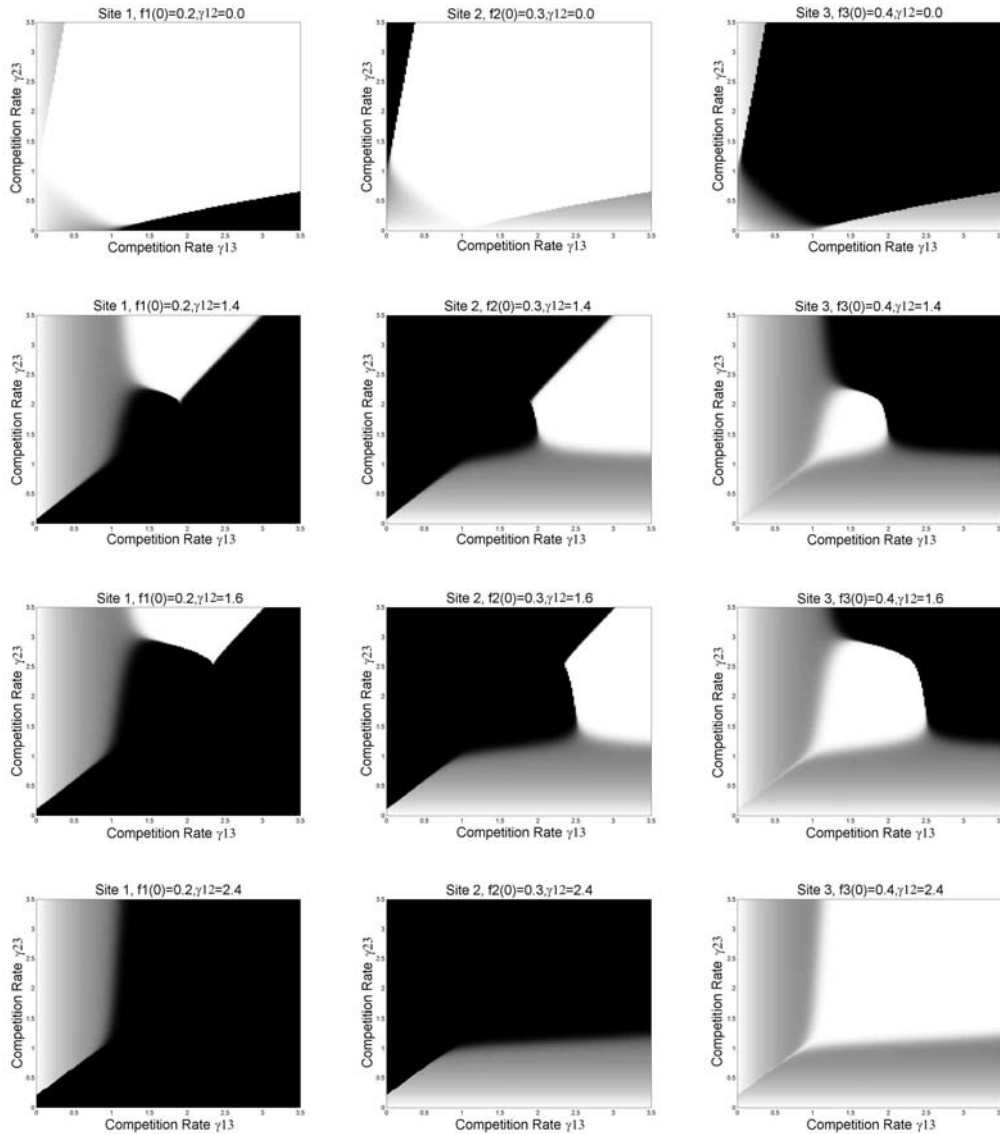


Figura 8.5. Cada pixel de las imágenes representa la fracción del mercado, f_i , controlada por cada sitio, el color negro significa 0 (el sitio no tiene ninguna visita), el blanco 1 (toda la población del segmento visita el sitio). La columna 1 muestra los resultados para el sitio 1, la columna 2 los del sitio 2 y la columna 3 los del 3. La condición inicial de los sitios es, $f_1(0) = 0.2$, $f_2(0) = 0.3$, $f_3(0) = 0.4$. El eje x representa valores diferentes de la tasa de competición entre los sitios 1 y 3. El eje y representa valores diferentes de la tasa de competición entre los sitios 2 y 3. La fila superior ha sido generada con una tasa de competición entre los sitios 1 y 2, $\gamma_{12} = 0.0$. La segunda fila ha sido realizada con una tasa de competición $\gamma_{12} = 1.4$. Para la tercera, $\gamma_{12} = 1.6$. En la cuarta y última, la tasa de competición es $\gamma_{12} = 2.4$. El tiempo de integración tiene un valor de 30 para todas las figuras.

del mercado para diferentes condiciones iniciales y tasas de competición. Cuando el nivel de competición entre la alianza y el sitio más poderoso es moderado, la alianza puede vencer, incluso si sus condiciones iniciales son mucho más pequeñas que las del sitio más poderoso.

Es importante hacer notar que estos resultados muestran un fenómeno novedoso e interesante que surge del modelo: la alianza puede vencer al sitio 3 si su grado de colaboración es elevado y, al mismo tiempo, el grado de competición con el sitio 3 es fuerte, pero no demasiado. Por tanto, esto implica que para vencer a un sitio poderoso es más económico crear dos sitios aliados que desarrollar un solo sitio con una elevada condición inicial. El desarrollo actual de Internet apoya esta conclusión que emerge del modelo. Es conocido que hoy en día los sitios de mayor éxito son portales temáticos, que tratan sólo con un tema particular y específico, en vez de tratar de cubrir un rango de informaciones más amplio.

8.10 Estrategias avanzadas

Hemos visto que el modelo propuesto de dinámica competitiva ofrece resultados acertados para mercados simples que parecen estar acordes con la realidad y con la intuición que comúnmente se tiene sobre estos fenómenos. Sin embargo, el modelo también predice la posibilidad de usar un conjunto de estrategias que están lejos de ser intuitivas. Hemos llamado estrategias avanzadas a todas esas estrategias singulares que podrían ser adaptadas a un entorno realista para diseñar sitios web ganadores.

Un ejemplo sencillo de estrategia avanzada puede presentarse si asumimos un mercado en Internet controlado por dos sitios: el sitio 1 y el sitio 3. Asumamos que el sitio 3 es el más poderoso controlando el 60% del mercado. El sitio 1 no es tan poderoso como el sitio 3 y cuenta solamente con el 40% del mercado. Dado que el sitio 3 es el más poderoso, no está interesado en establecer alianzas, ya que es consciente de que a largo plazo terminará por controlar completamente el mercado. Por tanto, mantiene un nivel de competición fuerte, por ejemplo $\gamma_{13} = 2$, con el sitio 1. En esta situación, el sitio 1 no puede hacer nada excepto invertir más recursos en marketing hasta conseguir alcanzar más del 60% de la cuota de mercado. Sin embargo, esta estrategia es probablemente demasiado cara. Imaginemos, por ejemplo, que el sitio 2 tiene solamente recursos para conseguir un aumento del 5% en su cuota. Disponer del 45% tampoco va a solucionar sus problemas, por lo que parece que este sitio está condenado a desaparecer. Sin embargo, nuestro modelo predice que en esta situación se puede usar una estrategia avanzada que puede salvarlo de la destrucción. Esta consiste en invertir los recursos disponibles en la creación de un nuevo sitio con el que se establecerá una alianza. Vamos a llamar 2 a este nuevo sitio. Seguramente, el sitio 3 no prestará mucha atención al pequeño sitio 2, sin embargo, el modelo predice que el efecto de este pequeño sitio puede destruirlo. Esta situación se pone de manifiesto en la Fig. 8.8.

Podemos presentar otra estrategia avanzada que se basa en un principio similar: el de permitir que un nuevo competidor elija la tasa de competición al integrarse

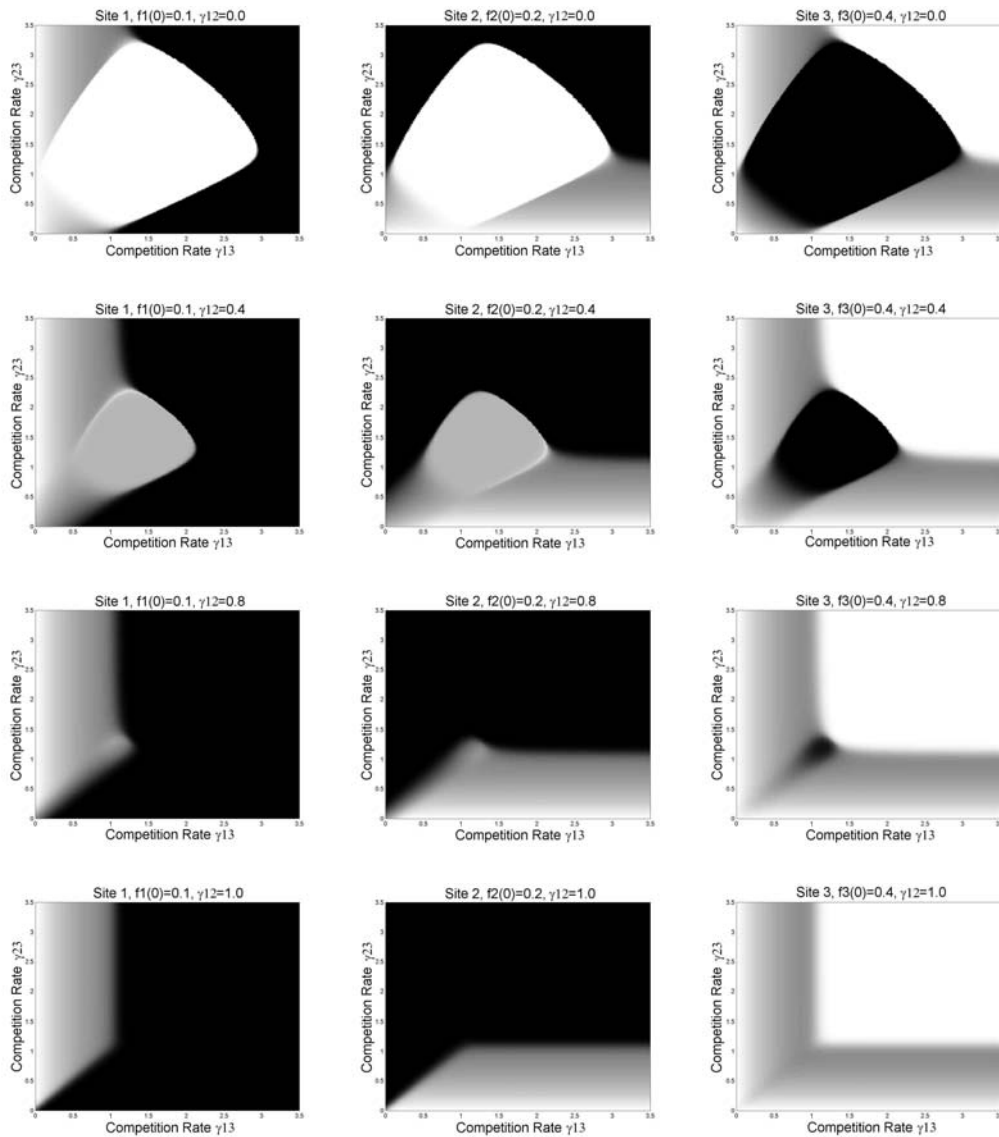


Figura 8.6. Cada pixel de las imágenes representa la fracción de mercado, f_i , controlada por cada sitio, el color negro significa 0 (el sitio no tiene ninguna visita), el blanco 1 (toda la población del segmento visita el sitio). La columna 1 muestra los resultados del sitio 1, la columna 2 los del sitio 2 y la columna 3 los del 3. Las condiciones iniciales de los sitios son, $f_1(0) = 0.1$, $f_2(0) = 0.2$, $f_3(0) = 0.4$. El eje x representa diferentes valores de la tasa de competición entre los sitios 1 y 3. El eje y representa diferentes valores de la tasa de competición entre los sitios 2 y 3. La fila superior ha sido realizada con una tasa de competición entre los sitios 1 y 2 de $\gamma_{12} = 0.0$. La segunda fila tiene $\gamma_{12} = 0.4$. En la tercera $\gamma_{12} = 0.8$. Finalmente, la cuarta fila tiene $\gamma_{12} = 1.0$. El tiempo de integración tiene un valor de 30 en todas las imágenes.

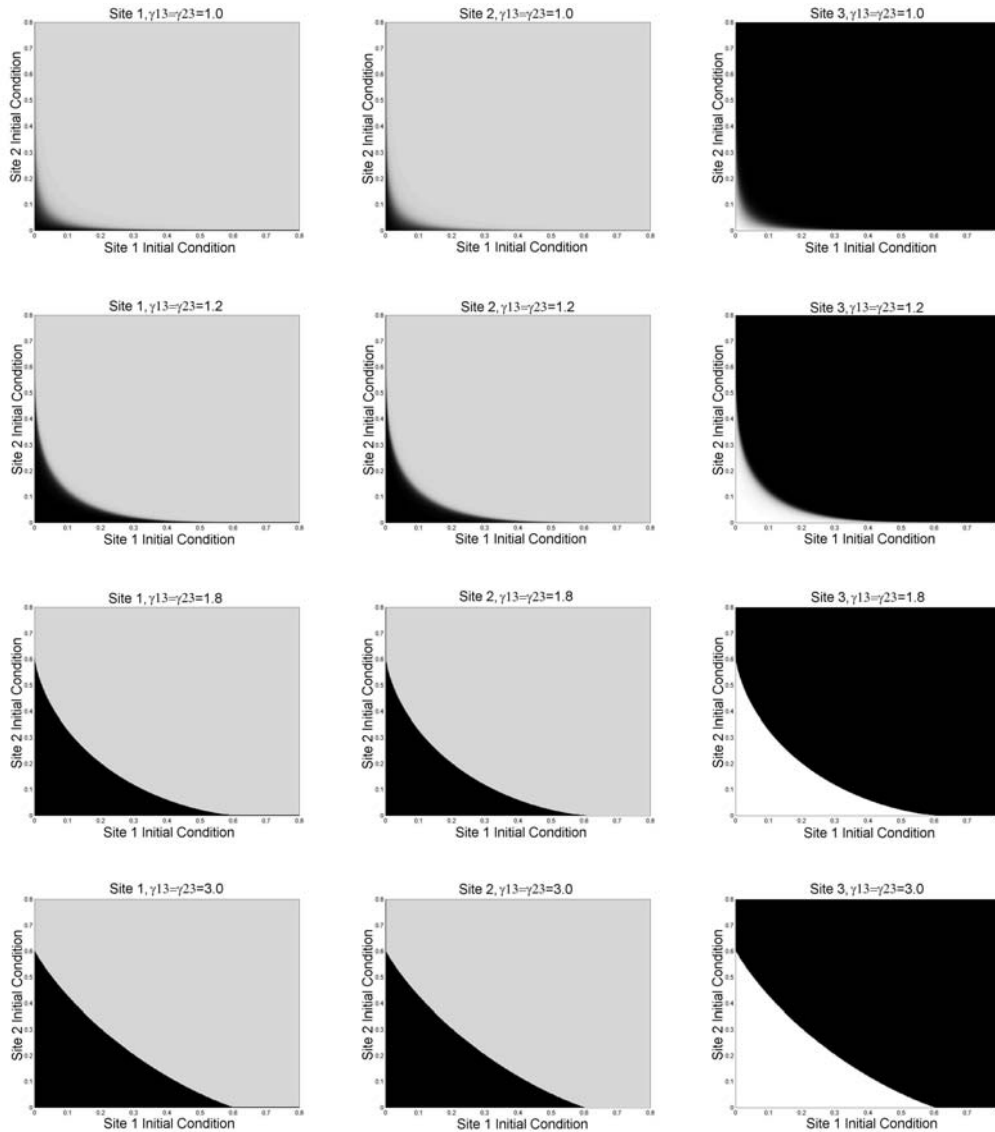


Figura 8.7. Cada pixel de las imágenes representa la fracción de mercado, f_i , controlada por cada sitio tras un tiempo de integración fijo. El color negro significa 0 (el sitio no tiene ninguna visita), el blanco 1 (toda la población del segmento de mercado visita el sitio). La columna 1 muestra los resultados del sitio 1, la columna 2 los del sitio 2 y la columna 3 los del 3. Para todas las figuras los siguientes parámetros son fijos: la tasa de competición entre los sitios 1 y 2, $\gamma_{12} = 0.2$, la condición inicial del sitio 3, $f_3(0) = 0.6$. El eje x representa diferentes valores de la condición inicial de sitio 1, $f_1(0)$. El eje y representa diferentes valores de la condición inicial de sitio 2, $f_2(0)$. La fila superior ha sido realizada con una tasa de competición $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 1.0$. En la segunda fila $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 1.2$. En la tercera $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 1.8$. Finalmente, en la cuarta $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 3.0$. El tiempo de integración tiene un valor de 30 para todas las figuras.

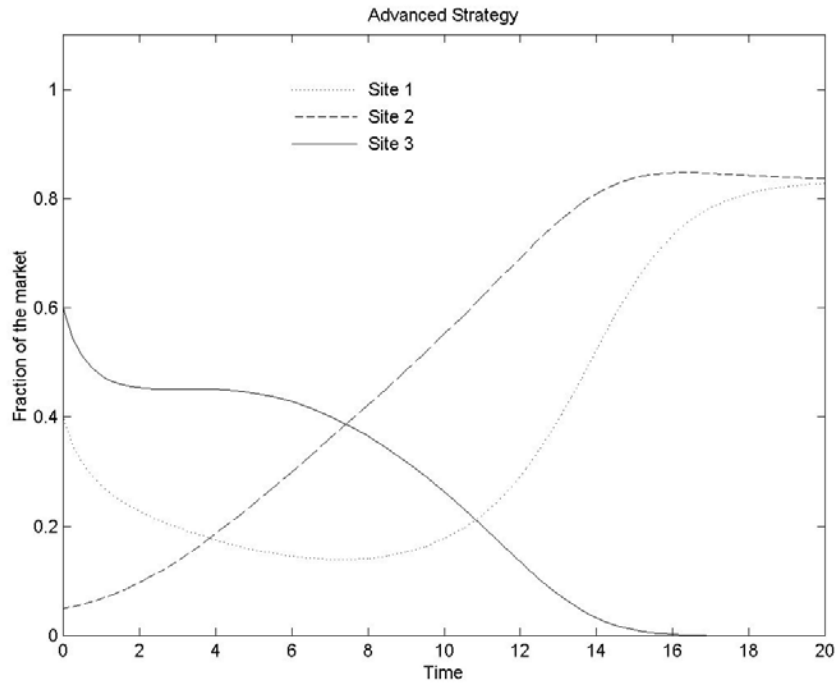


Figura 8.8. *Estrategia avanzada. La creación del pequeño sitio 2 por parte del 1 vence al poderoso sitio 3. Parámetros: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 0.2$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = 2$, $\gamma_{23} = \gamma_{32} = 1.1$. Condiciones iniciales: $f_1(0) = 0.4$, $f_2(0) = 0.05$, $f_3(0) = 0.6$.*

en un nuevo mercado. Esta situación es muy rica y muestra una gran cantidad de comportamientos interesantes. Uno de los ejemplos más sorprendentes es el del mercado en el que hay dos sitios realmente poderosos, 1 y 2, compitiendo duramente el uno con el otro. Por ejemplo, imaginemos que el sitio 1 tiene 60% del mercado y el sitio 2 tiene el 55%. En este contexto, introducimos un tercer competidor, el sitio 3, que comienza con una pequeña cuota del 10%. Este nuevo sitio es tan pequeño que probablemente sus rivales no le prestarán atención. Sin embargo, el modelo predice que, en esta situación, los dos sitios poderosos 1 y 2 se destruyen entre sí, permitiendo que el sitio 3 venza. La Fig. 8.9 muestra un ejemplo de evolución dinámica de un mercado en el que se ha producido este tipo de fenómeno.

8.11 Conclusiones

Hemos visto que un modelo muy simple puede predecir las características más importantes de los mercados de Internet y puede ser útil a la hora de definir estrategias para los sitios web que los componen. Sin embargo, los resultados no deben tomarse al pie de la letra. Hay muchos efectos importantes en estos mercados que no han sido tenidos en cuenta en el modelo. En particular, tal y como ya hemos mencionado,

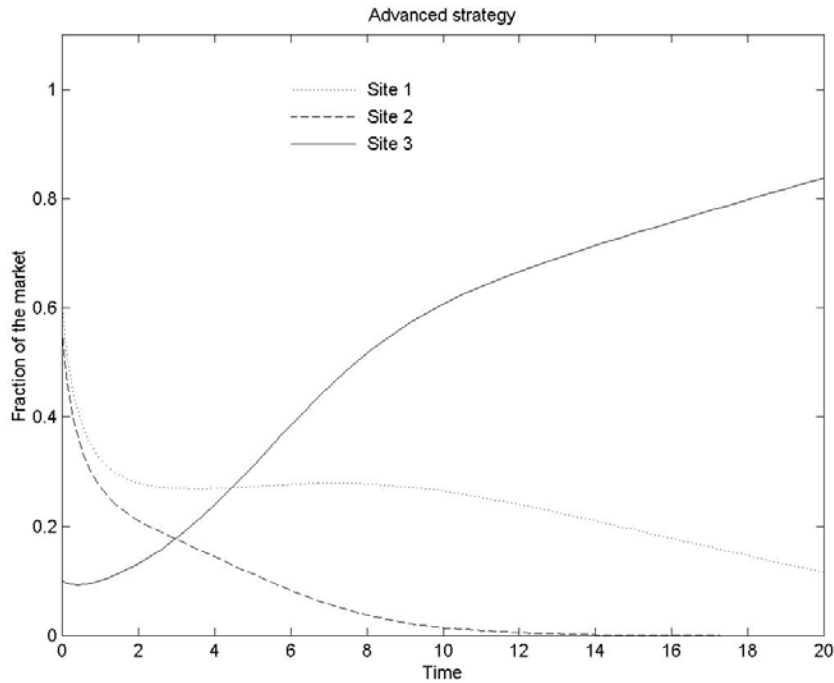


Figura 8.9. *Estrategia avanzada. El pequeño sitio 3 vence a los poderosos sitios 1 y 2. Parámetros: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\gamma_{21} = \gamma_{12} = 3$, $\gamma_{13} = \gamma_{31} = 1.2$, $\gamma_{23} = \gamma_{32} = 1.1$. Condiciones iniciales: $f_1(0) = 0.6$, $f_2(0) = 0.55$, $f_3(0) = 0.1$.*

no se consideran perturbaciones aleatorias que podrían adecuar los resultados de las simulaciones a escenarios más realistas. Otra carencia del modelo es que los sitios no pueden cambiar dinámicamente sus estrategias tal y como sucede en un entorno real. Los parámetros implicados en la definición de las estrategias (esencialmente las tasas de competición) son considerados valores constantes que no cambian con el tiempo. Sería interesante añadir la posibilidad de que estos parámetros puedan modificarse dependiendo de la evolución del mercado de modo que los sitios puedan presentar una mayor capacidad de adaptación.

Otra carencia del modelo es que los parámetros permanecen demasiado abstractos. En particular, no está claro cómo podemos interpretar y medir en la realidad las tasas de competición, los índices de crecimiento y las condiciones iniciales. Desde el punto de vista de un economista o de un directivo, lo realmente interesante es saber cómo medir con precisión el valor de α y γ en cada sitio. Frente a esto, nosotros sólo sabemos que sus valores están relacionados con características como el interés de sus contenidos o su semejanza con otros sitios, pero esto no es suficiente cuando tratamos de predecir la evolución de un segmento de mercado. Además, la unidad de tiempo permanece también demasiado ambigua; el modelo puede predecir un aumento del tráfico en, digamos, dos unidades de tiempo, pero para desplegar una estrategia realista sería necesario saber si estas dos unidades significan dos meses o

dos años. La mayor parte de estas indefiniciones podrían solucionarse comparando los resultados del modelo con datos reales sobre tráfico en Internet. Si partimos de un mercado real en el que las hipótesis del modelo sean satisfechas, podríamos determinar cuál es la unidad apropiada de tiempo simplemente comparando las predicciones del modelo con los datos. Lamentablemente, la información sobre tráfico en Internet no es fácil de obtener.

Otra posible mejora del modelo está relacionada con la posibilidad de añadir efectos parásitos o estacionales. A través de esta estrategia podríamos emular cambios en los parámetros debidos a acontecimientos externos. Un ejemplo claro es que los usuarios de Internet están menos interesados en conectarse a la red durante las vacaciones que cuando están en el trabajo, por tanto, el parámetro α podría ser expresado como la suma de varias fuerzas periódicas que modelizan los comportamientos estacionales, semanales y diarios de los clientes. Algunas simulaciones realizadas muestran que estos efectos podrían modificar las predicciones del modelo e inducir modificaciones en las estrategias. Modelos más avanzados deberían también tener en cuenta otros fenómenos complejos como el marketing cruzado (cuando un sitio tiene un hiperenlace hacia otros sitios), la reinversión de beneficios, la presencia de inversiones externas, etc.

A pesar de estas imperfecciones, creemos que el modelo es un punto de partida interesante para tratar de comprender con mayor profundidad los mecanismos que gobiernan la dinámica de competición de los mercados en Internet. Como se ha puesto de manifiesto, a diferencia de los mercados tradicionales basados en bienes materiales, Internet no puede ser descrito en términos de modelos de oferta y demanda. Esto es debido a que el coste de producción de los bienes electrónicos no depende del número de réplicas. Por tanto, una vez que un sitio controla un segmento de mercado, el resto de los competidores tiene una probabilidad baja de encontrar un nicho en ese segmento, porque el sitio principal es capaz de cubrir toda la demanda de mercado. Por este motivo, la característica *winner-take-all* aparece en estos mercados bajo condiciones de fuerte competición. Además, el modelo otorga un papel muy importante a las alianzas en Internet. Hasta la fecha, las alianzas entre sitios han tenido lugar en forma de una empresa que absorbe a otra, pero los contenidos de dos sitios aliados, por lo general, no se convierten en complementarios. El modelo predice que la especialización de los contenidos por parte de los sitios aliados puede dar mejores resultados que el mantenimiento de sitios de gran tamaño que traten todos los temas en los que una persona pueda estar interesada.

Se podría criticar que no hay pruebas sólidas de la validez del modelo. Ciertamente, sería muy interesante realizar un análisis exhaustivo del mismo comparando sus resultados con datos reales de tráfico en la red. Sin embargo, sin necesidad de hacerlo, podemos encontrar algunos indicios que demuestran que algunos comportamientos predichos por el modelo responden con lo que se da en un caso real [121].

Conclusiones

Capítulo 9

Conclusiones

En el trabajo de investigación que hemos presentado, se han analizado algunas características relevantes de los sistemas no lineales, incidiendo en su relación con los campos de la complejidad y de la teoría de la información. En esta dirección, hemos propuesto tres líneas de investigación diferentes, que corresponden a cada una de las partes constituyentes de la tesis: *Modelos en lo simple*, *Modelos en la frontera* y *Modelos en lo complejo*. En todas ellas, hemos explorado las aplicaciones potenciales de la dinámica no lineal y de las redes complejas en los campos de las tecnologías de la información y las comunicaciones. En cualquier caso, hemos tratado de mostrar el carácter altamente interdisciplinar de estos campos científicos. La investigación realizada está principalmente basada en el desarrollo de modelos matemáticos y computacionales de diferentes clases de sistemas, que hemos tratado de confirmar experimentalmente cuando ha sido posible.

Desde un punto de vista científico, este trabajo ha permitido extraer un número de resultados novedosos, que nunca habían sido reportados previamente en la literatura científica. Nuestro objetivo en las secciones siguientes es el de enumerar los más notables y proponer nuevas líneas de investigación basadas en ellos.

9.1 Conclusiones en lo simple

En la primera parte de la tesis, titulada *Modelos en lo simple*, hemos propuesto tres modelos de comunicación diferentes, que comparten un número de características comunes. Todos ellos están basados en principios no lineales y todos ellos son susceptibles de ser descritos en términos de un número bajo de ecuaciones diferenciales o de ecuaciones recurrentes. En todos los casos, hemos propuesto una metodología que permite su implementación práctica como sistemas de telecomunicación realistas con capacidad de transmisión digital. Sin embargo, dependiendo la naturaleza de los modelos, las conclusiones obtenidas pueden variar.

El modelo descrito en el *Capítulo 1* está basado en la dinámica de un potencial de doble pozo. Hemos mostrado que, en este caso, algunos fenómenos novedosos e interesantes aparecen debido a la no linealidad intrínseca del sistema. El más notable de ellos es un efecto de resonancia estocástica en la capacidad de información de

los canales que usen un receptor basado en esta clase de potencial. Esta interesante propiedad, que no puede estar presente en receptores lineales convencionales, sugiere la posibilidad de desarrollar una nueva familia de receptores digitales mejorados, tal y como algunos autores ya han propuesto [24]. Sin embargo, a través de una cadena de argumentos complementarios, demostramos que este tipo de sistema no puede mejorar la calidad de recepción de los receptores lineales usados actualmente en ingeniería de telecomunicación. Esta conclusión es tecnológicamente desalentadora, pero científicamente notable porque propone una nueva metodología para investigar esta clase de problemas. De todos modos, la posibilidad de aplicar esta clase de sistemas en otros campos de la ingeniería permanece todavía abierta.

Los dos modelos de comunicación propuestos en el *Capítulo 2* están basados en sistemas dinámicos no lineales que presentan la propiedad conocida como Caos. En este capítulo, mostramos que hay una conexión muy estrecha entre la dinámica caótica y la teoría de la información. Los modelos propuestos introducen dos nuevos paradigmas para codificar dinámicamente la información sobre una forma de onda caótica usando el concepto de control de caos. El primero, que está basado en un mapa unidimensional discreto, introduce ideas novedosas e interesantes presentando un método que permite codificar la información digital sobre la amplitud de una trayectoria caótica discreta. Este método alcanza unas prestaciones interesantes, acercándose al límite de Shannon para algunos valores particulares de la relación señal a ruido a la entrada. Este tipo de ideas son susceptibles de ser utilizadas en el campo de los *turbo códigos*, que está alcanzando una gran popularidad entre los ingenieros en los últimos años. El segundo modelo propuesto está basado en el sistema caótico continuo más popular: el atractor de Lorenz. En este caso, mostramos que es posible desarrollar un código de línea conveniente para corregir errores de transmisión, a través del control de una sola variable del espacio de fases. Proponemos un esquema completo de codificación - decodificación de información, que puede ser puesto en práctica fácilmente a través de un sistema de comunicación digital convencional, mostrando que es posible mejorar la calidad de recepción añadiendo redundancia sobre las señales emitidas. Los resultados obtenidos demuestran que sus prestaciones no mejoran las técnicas habituales utilizadas por los ingenieros, sin embargo, esta metodología abre nuevas posibilidades para desarrollar esquemas más avanzados que utilicen de manera natural la redundancia de los sistemas caóticos.

9.2 Conclusiones en la frontera

En la parte titulada *Modelos en la frontera*, hemos descrito un conjunto de modelos de diferentes sistemas, que comparten la característica de estar compuestos por múltiples constituyentes idénticos, que interactúan de una manera regular. Nuestro objetivo en esta parte ha sido mostrar que este tipo de topología básica de interacción es susceptible de producir procesamientos complejos de la información, incluso cuando los componentes aislados de los sistemas son simples.

En el *Capítulo 3*, hemos propuesto un modelo de comunicación basado en un conjunto neuronal, donde los elementos constituyentes son un conjunto de neuro-

nas independientes del tipo *integrate-and-fire*. A través de un procedimiento probabilístico, hemos mostrado que esta clase de sistema es capaz de detectar información codificada digitalmente. Además, suponiendo que el ruido recibido por las diferentes neuronas es independiente, demostramos que la calidad de recepción del sistema puede mejorar la del filtro adaptado: el mejor receptor lineal, que es usado de manera habitual en ingeniería de telecomunicación. Este resultado podría ser utilizado para el desarrollo de receptores de radio basados en la presencia de trayectorias multitrayecto. Esto también podría ser útil en el campo de las antenas inteligentes, un tema que es actualmente objeto de una activa investigación en ingeniería. En esta dirección, un análisis más profundo de los efectos del fenómeno de multitrayecto sobre los conjuntos neuronales sería de gran interés teórico y práctico.

El modelo propuesto en el *Capítulo 4* ya es conocido en la literatura científica [58]: un conjunto de osciladores acoplados que producen una estructura inducida por ruido. En este caso, nuestra contribución original consiste en la demostración de que esta clase de sistemas presentan un fenómeno novedoso que se ha dado en llamar resonancia vibrational. Gracias a este efecto, el procesamiento de una señal de baja frecuencia es mejorada por la adición de una perturbación de alta frecuencia. Además, usando un circuito electrónico, hemos confirmado experimentalmente el efecto de la resonancia vibrational sobre un modelo eficaz del campo medio en la estructura inducida por ruido.

Los resultados presentados en el *Capítulo 5* son interesantes porque muestran que es posible obtener un procesamiento complejo de la información a través de la interacción de elementos simples. En particular, mostramos que las propiedades locales en imágenes pueden ser obtenidas a través una topología regular de interacción entre autómatas celulares y neuronas.

9.3 Conclusiones en lo complejo

La última parte de la tesis se ha denominado *Modelos en el complejo*, y está dedicada al estudio de sistemas compuestos por múltiples constituyentes que actúan recíprocamente siguiendo una topología compleja. Esta parte está estrechamente relacionada con la nueva ciencia de las redes complejas, disciplina que está ganando gran popularidad en los últimos años. La realidades que hemos tratado de describir en esta parte son esencialmente complejas. Por esta razón, se ha asumido un nivel elevado de abstracción en la generación de los modelos.

En el *Capítulo 6*, proponemos un modelo para el flujo de información en redes sociales, asumiendo que una cierta cantidad de información es perdida por los individuos en el proceso de transferencia. Gracias a un conjunto de restricciones simples, mostramos que el modelo predice la existencia de una relación muy estrecha entre la topología de una comunidad social y su eficiencia. Este resultado parece estar relacionado con algunos fenómenos que los sociólogos han estado investigando en las últimas décadas. En particular, demostramos que los resultados obtenidos están de acuerdo con la hipótesis del límite 150 para comunidades humanas propuesto por Dunbar [117]. Además, mostramos que esta clase de modelos son apropiados para

el análisis de la estructura de empresas y organizaciones y pueden ser usados para desarrollar nuevas metodologías en la gestión de recursos humanos.

Finalmente, el *Capítulo 7* está dedicado al estudio de las redes competitivas que surgen en los mercados del WWW en Internet. Proponemos un modelo que describe la dinámica competitiva en estos mercados, que está inspirado en la evolución de especies en ecosistemas naturales. Mostramos que este modelo predice algunos fenómenos notables que se dan en estos mercados como la característica *winner-take-all*. Además, mostramos que el modelo permite la definición una estrategia óptima para cualquier mercado dado. Estos resultados abren nuevas posibilidades para el desarrollo de metodologías de dirección compleja, que pueden ser útiles en algunos campos de la economía.

9.4 Publicaciones

Durante el proceso de investigación realizado por el autor de esta tesis, algunas publicaciones científicas han salido a luz. Considerando que estas constituyen un complemento para el trabajo presentado aquí, creemos es importante terminar esta tesis citando las más relevantes de ellas.

1. L. López, and M.A.F. Sanjuán, *Defining strategies to win in the Internet Markets*, *Physica A* **301**, 512-534 (2001).
2. L. López, and M.A.F. Sanjuán, *Relation between structure and size in social networks*, *Physical Review E* **65**, 036107 (2002).
3. I. Pérez-Mariño, L. López, and M.A.F. Sanjuán, *Channel coding in communications using chaos*, *Physics Letters A* **295**, 185-191 (2002).
4. M. Baptista, L. López, *Information transfer in chaos based communications*, *Physical Review E* **65**, 055201(R) (2002).
5. A. Zaikin, L. López, J.P. Baltanás, J. Kurths, M.A.F. Sanjuán, *Vibrational resonance in a noise induced structure*, *Physical Review E* **66**, 011106 (2002).
6. I. Pérez-Mariño, L. López, J. Míguez, M.A.F. Sanjuán, *A novel channel coding scheme based on continuous time chaotic dynamics*, in “2002 14th International Conference on Digital Signal Processing Proceedings DSP 2002”, A.N. Skodras, A.G. Constantinides eds. (IEEE Service Center, Piscataway, NJ), pp. 1321-1324 (2002).
7. L. López, J.F. Mendes, M.A.F. Sanjuán, *Hierarchical social networks and information flow*, *Physica A* **316**, 591-604 (2002).
8. L. López, J.A. Almendral, M.A.F. Sanjuán, *Complex networks and the WWW market*, *Physica A* (2002) in press.

9. J.A. Almendral, L. López, M.A.F. Sanjuán, *Information flow in generalized hierarchical networks*, submitted to Physica A.
10. J. B. Baltanás, L. López, I. I. Blechman, P.S. Landa, A. Zaikin, J. Kurths, M.A.F. Sanjuán, *Experimental evidence, numerics and theory of vibrational resonance in bistable systems*, submitted to Phys. Rev. E.
11. L. López, J. Baltanás, M.A.F Sanjuán, *Information theory and the double well potential*, in preparation.
12. L. López, J. Baltanás, M.A.F Sanjuan, *Neuronal ensembles as communication receptors*, in preparation.
13. L. López, J.A. Almendral, M.A.F Sanjuán, *The complex network of research and development in Europe*, in preparation.

Apéndice

Apéndice A

Teoría matemática de la comunicación

A.1 Introducción

Existen múltiples alternativas a la hora de definir el concepto de información según el contexto y el objetivo que se persiga. Evidentemente, la noción de información que puede tener un científico es muy diferente de la que puede tener un broker y mucho más de la que posee un policía o un espía. En el contexto de la teoría de la comunicación, existe una definición matemática formal de información debida a Shannon [4]. Las ideas de Shannon sobre la información están basadas en la noción intuitiva de incertidumbre. El concepto de incertidumbre surge cuando se dispone de diferentes opciones posibles. Cuanto más difícil sea averiguar la opción apropiada, más alto será el nivel de incertidumbre asociado. De este modo, podemos definir el contenido de información de un suceso aleatorio como la cantidad de incertidumbre producida por el mismo. Es interesante comentar que el contenido de información de un suceso no es lo mismo que la información conocida por un observador sobre ese suceso. De hecho, la información conocida es, en cierto modo, opuesta a la incertidumbre asociada, porque cuanto mayor sea la información que poseemos, menor será la duda y la indecisión. Para evitar esta ambigüedad, Shannon dio un nombre diferente al contenido de información llamándolo entropía.

A.2 Entropía e incertidumbre

Si representamos una fuente discreta de información como un proceso de Markoff, podemos definir la entropía producida por tal proceso como

$$H = -K \sum_{i=1}^n p_i \log p_i, \quad (\text{A.1})$$

donde p_i es la probabilidad de que el acontecimiento i ocurra y la constante K está asociada a la elección de una unidad de medida. Cuando $K = 1$ y la base logarítmica es 2, la unidad de medida se denomina dígito binario o más comúnmente *bit*. La cantidad H tiene un conjunto de propiedades interesantes que justifican plenamente que sea considerada una medida razonable de información.

1. $H = 0$ si y sólo si todos los p_i son 0 excepto uno de ellos que valga 1. Por tanto, sólo cuando estamos seguros del resultado, H desaparece. En cualquier otro caso H es positivo.
2. Para un n dado, H es máximo e igual a $\log n$ cuando todos los p_i son iguales (con valor $\frac{1}{n}$). Esta es intuitivamente la situación más incierta posible.
3. Si se suponen dos acontecimientos, x e y con m posibilidades para el primero y n posibilidades para el segundo. Sea $p(i, j)$ la probabilidad de la presencia conjunta de i para el primero y j para el segundo. La entropía del acontecimiento conjunto es

$$H(x, y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p(i, j), \quad (\text{A.2})$$

mientras que

$$H(x) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log \sum_j p(i, j) \quad H(y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log \sum_i p(i, j). \quad (\text{A.3})$$

Es fácil demostrar que

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y) \quad (\text{A.4})$$

con igualdad sólo si los acontecimientos son independientes ($p(i, j) = p(i)p(j)$). La incertidumbre de un acontecimiento conjunto es menor o igual que la suma de las incertidumbres individuales.

4. Si se supone que hay dos eventos con probabilidades x e y , no necesariamente independientes. Para cualquier valor particular i que x pueda asumir, hay una probabilidad condicional $p_i(j)$ de que y tenga el valor j . Donde

$$p_i(j) = \frac{p(i, j)}{\sum_j p(i, j)}. \quad (\text{A.5})$$

Definimos la entropía condicional de y , $H_x(y)$ como el promedio de la entropía de y para cada valor de x , ponderado según la probabilidad de x :

$$H_x(y) = - \sum_{i,j} p(i, j) \log p_i(j). \quad (\text{A.6})$$

Esta cantidad mide cuánta incertidumbre tenemos, en promedio, sobre y cuando conocemos x . Substituyendo el valor de $p_i(j)$ podemos obtener

$$H(x, y) = H(x) + H_x(y). \quad (\text{A.7})$$

La incertidumbre (o entropía) del evento conjunto x, y es la incertidumbre de x más la incertidumbre de y cuando x es conocida.

5. Utilizando los argumentos precedentes es posible demostrar que

$$H(y) \geq H_x(y). \quad (\text{A.8})$$

La incertidumbre de y nunca aumenta por el conocimiento de x . En todo caso, disminuye a no ser que x e y sean independientes, situación en la que no cambia.

A.3 Entropía de una fuente de información

Considérese una fuente discreta con un conjunto finito de estados que puede ser modelizada como una cadena de Markoff. Para cada estado posible i habrá un conjunto de probabilidades $p_i(j)$ de producir varios símbolos posibles j . Por tanto, hay una entropía H_i para cada estado. La entropía de la fuente vendrá definida como el promedio de estos H_i ponderado conforme a la probabilidad de cada uno de los estados:

$$H = \sum_i P_i H_i = - \sum_{i,j} P_i p_i(j) \log p_i(j). \quad (\text{A.9})$$

Esta es la entropía de la fuente por símbolo. Si el proceso de Markoff evoluciona con una tasa de tiempo definida, es también posible definir una entropía por segundo

$$H' = \sum_i f_i H_i, \quad (\text{A.10})$$

donde f_i es la frecuencia media (ocurrencias por segundo) del estado i . Claramente

$$H' = mH, \quad (\text{A.11})$$

donde m es el número medio de símbolos producidos por segundo. H o H' miden la cantidad de información generada por la fuente por símbolo o por segundo. Si la base logarítmica es 2, representarán bits por símbolo o por segundo.

Si los símbolos sucesivos son independientes, entonces H es simplemente $-\sum p_i \log p_i$, donde p_i es la probabilidad del símbolo i . Supóngase que en este caso consideramos un mensaje largo de N símbolos. Este contendrá, con elevada probabilidad $p_1 N$ ocurrencias del primer símbolo, $p_2 N$ del segundo, etc. De ahí, la probabilidad de este mensaje particular será aproximadamente $p = p_1^{p_1 N} p_2^{p_2 N} \dots p_n^{p_n N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \log p &= N \sum_i p_i \log p_i \\ \log p &= -NH \\ H &= \frac{\log(1/p)}{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Por tanto H es aproximadamente el logaritmo del inverso de la probabilidad de una secuencia típica larga dividida por el número de símbolos en la secuencia. El mismo resultado es válido para cualquier fuente.

A.4 Modelo general de sistemas de comunicación

El problema fundamental de la comunicación es el de, partiendo de un mensaje dado, reproducirlo exactamente o aproximadamente en otro punto alejado. Con frecuencia, los mensajes tienen significado; es decir, se refieren a o están relacionados con algún sistema o con ciertas entidades físicas o conceptuales. Los aspectos semánticos de la comunicación son no pertinentes al problema de la ingeniería. El aspecto significativo es que el mensaje real es seleccionado de entre un conjunto de mensajes posibles. El sistema debe ser diseñado para funcionar independientemente

de la selección y no solamente en un caso puntual, ya que este es desconocido en el momento del diseño. Cualquier sistema de comunicación debería tener, al menos, las partes siguientes:

1. Una *fente de información*, que produce un mensaje o una secuencia de mensajes. El mensaje puede ser de varios tipos, incluyendo: una secuencia de símbolos discretos (como en el telégrafo), una función $f(t)$ del tiempo (como en telefonía), una función de tiempo y otras variables (como en televisión), etc.
2. Un *transmisor*, que actúa sobre el mensaje de modo que produce una señal conveniente para ser transmitida por un canal. En telefonía, esta operación consiste simplemente en una presión sonora que se transforma en una corriente eléctrica proporcional. En telegrafía existe una operación de codificación que produce una secuencia de puntos, líneas y espacios sobre el canal, etc.
3. El *canal*, que es simplemente el medio por el que se transmite la señal desde el transmisor hasta el receptor. Este puede ser un par de cables, un cable coaxial, una banda de frecuencias de radio, etc. Durante la transmisión, o en uno de los terminales, la señal puede ser perturbada por el ruido.
4. El *receptor* generalmente realiza la operación inversa al la llevada a cabo por el transmisor, reconstruyendo el mensaje a partir de la señal.
5. El destinatario es la persona (o la entidad) a quien el mensaje va dirigido.

A.4.1 El canal discreto sin ruido

Un canal discreto es un sistema en el que una secuencia de elementos, extraídos de un conjunto finito de símbolos S_1, \dots, S_n , puede ser transmitida de un punto a otro. Cada uno de los símbolos S_i tiene una cierta duración en el tiempo t_i segundos (no necesariamente el mismo para diferentes S_i). No es necesario que todas las secuencias posibles de S_i puedan ser transmitidas sobre el sistema; es posible permitir sólo ciertas secuencias. En un canal sin ruido, asumimos que no hay ninguna perturbación sobre la señal ni sobre el proceso de transmisión, así, cuando un símbolo S_i es emitido, la probabilidad de recibir ese mismo símbolo es siempre igual a 1. En estas condiciones, definimos la capacidad C de un canal discreto sin ruido como

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N(T)}{T}, \quad (\text{A.13})$$

donde $N(T)$ es el número de señales permitidas de duración T .

A.4.2 El canal discreto con ruido

Ahora consideramos el caso en el que la señal es perturbada por el ruido durante la transmisión en uno u otro de los terminales. Esto significa que la señal recibida no es

necesariamente la misma que la enviada por el transmisor. Se pueden distinguir dos casos. Si una señal particular transmitida siempre produce la misma señal recibida, p. ej. la señal recibida es una función determinista de la señal transmitida, entonces se puede llamar distorsión a ese efecto. Si esta función tiene un inverso, aplicando la operación funcional inversa sobre la señal recibida, se puede compensar la distorsión. El caso de interés aquí es aquel en el que la señal no siempre sufre el mismo cambio en la transmisión. En este caso, podemos asumir que la señal E recibida es una función de la señal S transmitida y de una segunda variable, el ruido N .

$$E = f(S, N). \quad (\text{A.14})$$

El ruido se va a considerar como una variable aleatoria. En general, puede ser representado por un proceso estocástico conveniente. La mayor parte de los canales discretos con ruido que consideraremos son una generalización del canal sin ruido descrito antes. Asumimos un número finito de estados y un conjunto de probabilidades

$$p_{\alpha,i}(\beta, j). \quad (\text{A.15})$$

Esta es la probabilidad de que si el canal está en el estado α y el símbolo i es transmitido, el símbolo j será recibido y el canal se quede en el estado β . Así, α y β se extienden sobre todos los estados posibles, i sobre las señales posibles transmitidas y j sobre las señales posibles recibidas. En el caso en el que simplemente los símbolos sucesivos son perturbados de manera independiente por el ruido, hay sólo un estado, y el canal viene descrito por un conjunto de probabilidades de transición $p_i(j)$, que miden la probabilidad de que el símbolo i sea transmitido y el j recibido.

Si un canal con ruido es conectado a una fuente, hay dos procesos estadísticos en acción: la fuente y el ruido. Por tanto, hay un conjunto de entropías que pueden ser calculadas. Primero, la entropía $H(x)$ de la fuente o de la entrada del canal (estas serán iguales si el transmisor es no singular). La entropía de salida del canal, p. ej. la señal recibida, será denotada por $H(y)$. En el caso sin ruido $H(y) = H(x)$. La entropía conjunta de la entrada y de salida será $H(x, y)$. Finalmente, hay dos entropías condicionales $H_x(y)$ y $H_y(x)$, la entropía de la salida cuando la entrada es conocida y al contrario. Entre estas cantidades, tenemos las relaciones

$$H(x, y) = H(x) - H_x(y) = H(y) + H_y(x). \quad (\text{A.16})$$

Todas estas entropías pueden ser medidas en base a un modelo por-segundo o por-símbolo.

A.5 Equivocación y capacidad del canal

Si el canal es con ruido, no es, en general, posible reconstruir el mensaje original o la señal transmitida con certeza a partir de la señal E recibida. Sin embargo, existen modos de transmitir la información que son óptimos a la hora de combatir el ruido. Este es el problema que ahora consideramos.

Supongamos que existen dos símbolos posibles 0 y 1, y transmitimos a una tasa de 1000 símbolos por segundo con probabilidades $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Así, nuestra fuente produce información a razón de 1000 bits por segundo. Durante la transmisión, el ruido introduce errores de modo que, en promedio, 1 de cada 100 es recibido incorrectamente (0 como 1 o 1 como 0). ¿Cuál es la tasa de transmisión de información? Seguramente menos de 1000 bits por segundo, dado que aproximadamente el 1% de los símbolos recibidos son incorrectos. Nuestro primer impulso podría ser decir que la tasa es de 990 bits por segundo, simplemente restando el número esperado de errores. Sin embargo, esta respuesta no es satisfactoria ya que falla a la hora de tener en cuenta la carencia de conocimiento sobre dónde se producen los errores. Podemos llevarlo a un caso extremo y suponer que el ruido es tan grande que los símbolos recibidos son completamente independientes de los símbolos transmitidos. La probabilidad de recibir un 1 es $\frac{1}{2}$ y de modo similar para 0. Entonces aproximadamente la mitad de los símbolos recibidos son correctos, por lo que estaríamos diciendo que se transmiten 500 bits por segundo, mientras que en realidad ninguna información está siendo transmitida en absoluto. Una transmisión igualmente buena sería obtenida prescindiendo por completo del canal de comunicaciones y lanzando una moneda al aire para estimar el bit recibido.

Claramente, la corrección apropiada que debe aplicarse sobre la información transmitida tiene que ver con la cantidad de esta información que ha sido omitida en la señal recibida, o lo que es lo mismo, con la incertidumbre asociada con la señal recibida que no es la misma que la emitida. Por nuestra discusión anterior sobre la entropía como una medida de la incertidumbre, parece razonable usar la entropía condicionada del mensaje, conociendo la señal recibida, como una medida de esta información perdida. Por tanto, la tasa de transmisión real, R , será obtenida restando de la tasa de producción (la entropía de la fuente) la tasa media de entropía condicional.

$$R = H(x) - H_y(x). \quad (\text{A.17})$$

La entropía condicional $H_y(x)$, por conveniencia, será llamada equivocación. En el ejemplo considerado anteriormente, si un 0 es recibido, la probabilidad a posteriori de que un 0 sea transmitido es 0.99, y de que un 1 fuera transmitido es 0.01. Estas cifras se invierten si un 1 es recibido. Por tanto

$$H_x(y) = -[0.99 \log 0.99 + 0.01 \log 0.01] = 0.081 \text{ bits/symbol}, \quad (\text{A.18})$$

es decir, 81 bits por segundo. Podemos decir que el sistema transmite con una tasa de $1000 - 81 = 919$ bits por segundo.

La capacidad C de un canal con ruido debería ser la máxima tasa posible de transmisión (la tasa cuando la fuente está perfectamente adaptada al canal). Por tanto, definimos la capacidad de canal por

$$C = \text{Max}(H(x) - H_y(x)) \quad (\text{A.19})$$

donde el máximo está evaluado teniendo en cuenta todas las posibles fuentes que se pueden conectar al canal. Si el canal es sin ruido, $H_y(x) = 0$. Esta definición es equivalente a la que ya hemos presentado para canales sin ruido.

A.6 Entropía de una distribución continua

La entropía de un conjunto discreto de probabilidades p_1, \dots, p_n ha sido definida como:

$$H = - \sum p_i \log p_i. \quad (\text{A.20})$$

De una manera análoga, definimos la entropía de una distribución continua que tenga una función de densidad de probabilidad $p(x)$ por:

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx. \quad (\text{A.21})$$

Para una distribución n dimensional $p(x_1, \dots, x_n)$ tenemos

$$H = - \int \dots \int p(x_1, \dots, x_n) \log p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (\text{A.22})$$

Si tenemos dos argumentos x e y (que pueden ser multidimensionales) las entropías conjuntas y condicionales de $p(x, y)$ son

$$H(x, y) = - \int \int p(x, y) \log p(x, y) dx dy \quad (\text{A.23})$$

y

$$H_x(y) = - \int \int p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)} dx dy \quad H_y(x) = - \int \int p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(y)} dx dy \quad (\text{A.24})$$

La entropía de las distribuciones continuas tiene la mayor parte de las propiedades que se presentan en el caso discreto. En particular tenemos las siguientes:

1. Si x está limitada a un cierto volumen v en su espacio, entonces $H(x)$ es máxima e igual a $\log v$ cuando $p(x)$ es constante ($1/v$) en el volumen.
2. Con dos variables x, y cualesquiera tenemos

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y), \quad (\text{A.25})$$

con igualdad si (y sólo si) x e y son independientes ($p(x, y) = p(x)p(y)$).

3. Tenemos $H(x, y) = H(x) + H_x(y) = H(y) + H_y(x)$ y $H_x(y) \leq H(y)$.
4. Si $p(x)$ es una distribución unidimensional, la forma de $p(x)$ que produce una entropía máxima sujeta a la condición de que la desviación estándar de x esté fijada en σ es Gaussiana.
5. La entropía de una distribución unidimensional Gaussiana cuya desviación estándar sea σ es

$$H(x) = \log \sqrt{2\pi e} \sigma \quad (\text{A.26})$$

6. Hay una diferencia importante entre las entropías continuas y discretas. En el caso discreto, la entropía mide de un modo absoluto la aleatoriedad de la variable aleatoria. En el caso continuo, la medida depende del sistema de coordenadas. Si cambiamos las coordenadas, la entropía, en general, también cambiará. De hecho, si cambiamos a las coordenadas y_1, \dots, y_n , la nueva entropía será

$$H(y) = \int \dots \int p(x_1, \dots, x_n) J \left(\frac{x}{y} \right) \log p(x_1, \dots, x_n) J \left(\frac{x}{y} \right) dy_1 \dots dy_n, \quad (\text{A.27})$$

donde $J \left(\frac{x}{y} \right)$ es el Jacobiano de la transformación de coordenadas. Desarrollando el logaritmo y cambiando las variables a x_1, \dots, x_n , obtenemos:

$$H(y) = H(x) - \int \dots \int p(x_1, \dots, x_n) \log J \left(\frac{x}{y} \right) dx_1 \dots dx_n. \quad (\text{A.28})$$

Así, la nueva entropía es la anterior menos la esperanza del logaritmo del Jacobiano. En el caso continuo, la entropía puede ser considerada una medida de aleatoriedad en relación con un estándar dado, a saber, el sistema de coordenadas que da un mismo peso a todos los elementos de volumen $dx_1 \dots dx_n$. Cuando cambiamos el sistema de coordenadas, la entropía en el nuevo sistema mide la aleatoriedad cuando los elementos de volumen, $dy_1 \dots dy_n$, en el nuevo sistema tienen el mismo peso.

A pesar de esta dependencia del sistema de coordenadas, el concepto de entropía es tan importante en el caso continuo como en el caso discreto. Esto es debido al hecho de que la tasa de información y la capacidad del canal dependen de la diferencia de dos entropías y esta diferencia no depende del sistema de referencia.

La entropía de una distribución continua puede ser negativa. La escala de medidas pone un cero arbitrario correspondiente a una distribución uniforme

A.7 Capacidad de un canal continuo

En un canal continuo, las señales transmitidas serán funciones continuas del tiempo $f(t)$ que pertenezcan a un conjunto particular y las señales recibidas serán las versiones perturbadas de estas. Consideraremos sólo el caso en el que las señales transmitidas y recibidas están limitadas a una cierta banda W . Entonces, pueden ser especificadas durante un tiempo, T , por $2TW$ muestras, y su estructura estadística por funciones de distribución de dimensión finita. Así, la distribución de la señal transmitida vendrá determinada por

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x) \quad (\text{A.29})$$

y la señal con ruido por la distribución de probabilidad condicional

$$P_{x_1, \dots, x_n}(y_1, \dots, y_n) = P_x(y). \quad (\text{A.30})$$

La tasa de transmisión de información para un canal continuo está definida de un modo análogo a la de un canal discreto, a saber

$$R = H(x) - H_y(x), \quad (\text{A.31})$$

donde $H(x)$ es la entropía de la entrada y $H_y(x)$ la equivocación. La capacidad del canal C está definida como el máximo de R cuando variamos la entrada sobre todos los conjuntos posibles. Esto significa que en una aproximación de dimensión finita, debemos variar $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ y maximizar

$$-\int P(x) \log P(x) dx + \int \int P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{P(y)} dx dy. \quad (\text{A.32})$$

Esto puede ser escrito como

$$\int \int P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} dx dy \quad (\text{A.33})$$

usando el hecho de que $\int \int P(x, y) \log P(x) dx dy = \int P(x) \log P(x) dx$. La capacidad de canal viene entonces expresada por:

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Max} \frac{1}{T} \int \int P(x, y) \log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)} dx dy. \quad (\text{A.34})$$

De este modo, es obvio que R y C son independientes del sistema de coordenadas ya que el numerador y el denominador de $\log \frac{P(x, y)}{P(x)P(y)}$ está multiplicado por los mismos factores cuando x e y sufren un cambio de coordenadas. Esta expresión integral para C es más general que $H(x) - H_y(x)$. Correctamente interpretada, esta expresión siempre va a existir, mientras que $H(x) - H_y(x)$ puede asumir una forma indeterminada $\infty - \infty$ en algunos casos. Esto ocurre, por ejemplo, si x está limitada a una superficie de menos dimensiones que n en su aproximación n dimensional.

Si la base logarítmica utilizada para evaluar $H(x)$ y $H_y(x)$ es dos, entonces C es el número máximo de los dígitos binarios que pueden ser enviados por segundo sobre el canal con una equivocación tan pequeña como se desee, tal como en el caso discreto. Esto puede ser visto físicamente dividiendo el espacio de señales en un número grande de pequeñas células suficientemente pequeñas, de modo que la densidad de probabilidad $P_x(y)$ pueda considerarse aproximadamente constante sobre una célula (de x o y). Si las células son consideradas como puntos distintos, la situación es esencialmente la de un canal discreto y las propiedades obtenidas para este pueden usarse aquí. Físicamente, está claro que cuantificar el volumen en puntos individuales no puede, en ninguna situación práctica, cambiar la respuesta final considerablemente, a condición de que las regiones sean lo suficientemente pequeñas. Así, la capacidad será el límite de las capacidades de la subdivisión discreta y esta será la capacidad continua que hemos definido previamente.

Desde el punto de vista matemático, puede demostrarse que si u es el mensaje, x es la señal, y es la señal recibida (perturbada por el ruido) y v es el mensaje recuperado, entonces

$$H(x) - H_y(x) \geq H(u) - H_v(u) \quad (\text{A.35})$$

independientemente de las operaciones realizadas sobre u para obtener x o sobre y para obtener v . Así, no importa como codificamos los dígitos binarios, o como decodificamos la señal recibida para recuperar el mensaje, la tasa discreta de los dígitos binarios no puede exceder la capacidad de canal que hemos definido. Por otra parte, es posible, en condiciones muy generales, encontrar un sistema de codificación para transmitir dígitos binarios a una tasa C con una equivocación o una frecuencia de errores tan pequeña como se desee. Esta conclusión es cierta, por ejemplo, si cuando tomamos un espacio de dimensión finita, la función de distribución $P(x, y)$ es continua excepto en un conjunto de puntos con probabilidad cero.

Un caso especialmente importante es aquél en el que el ruido es aditivo sobre la señal y es independiente de esta. Entonces, $P_x(y)$ es función sólo de la diferencia (vector) $n = (y - x)$

$$P_x(y) = Q(y - x) \quad (\text{A.36})$$

y podemos asignar una entropía definida al ruido (independiente de la distribución de la señal) que será denotada como $H(n)$. En este sentido, es posible demostrar que si la señal y el ruido son independientes y la señal recibida es la suma de la señal transmitida y el ruido, entonces la tasa de transmisión es

$$R = H(y) - H(n), \quad (\text{A.37})$$

es decir, la entropía de la señal recibida menos de la entropía del ruido. La capacidad del canal será

$$C = \text{Max}(H(y) - H(n)), \quad (\text{A.38})$$

dado que $y = x + n$, $H(x, y) = H(x, n)$. Desarrollando la parte izquierda y usando el hecho de que x y n son independientes

$$H(y) + H_y(x) = H(x) + H(n). \quad (\text{A.39})$$

Por tanto

$$R = H(x) - H_y(x) = H(y) - H(n). \quad (\text{A.40})$$

Dado que $H(n)$ es independiente de $P(x)$, maximizar R es equivalente a maximizar la entropía de la señal recibida $H(y)$. Si hay ciertas restricciones sobre el conjunto de señales transmitidas, la entropía de la señal recibida debe ser maximizada sujeta a estas restricciones.

Una aplicación inmediata de las conclusiones precedentes es la que se da cuando el ruido es un ruido térmico blanco y las señales transmitidas están limitadas a una cierta potencia media P . Entonces, la señal recibida tiene una potencia media $P + N$ donde N es la potencia media del ruido. La entropía máxima para las señales recibidas se da cuando estas también forman un ruido blanco, ya que esta es la mayor entropía posible con potencia $P + N$ y puede ser obtenida para una elección apropiada de las señales transmitidas, a saber, si estas forman un conjunto de ruido blanco de potencia P . La entropía (por segundo) del conjunto recibido es entonces

$$H(y) = W \log 2\pi e(P + N), \quad (\text{A.41})$$

y la entropía del ruido es

$$H(n) = W \log 2\pi eN. \quad (\text{A.42})$$

La capacidad de canal es

$$C = H(y) - H(n) = W \log \frac{P + N}{N}. \quad (\text{A.43})$$

El resumen, podemos concluir que la capacidad de un canal de anchura de banda W perturbado por ruido térmico blanco de potencia N , cuando la potencia media transmitida está limitado a P es

$$C = W \log \frac{P + N}{N}. \quad (\text{A.44})$$

Apéndice B

Conceptos básicos sobre sistemas de comunicación.

B.1 Relación Señal a Ruido

Un modo cuantitativo de cuantificar el efecto del ruido en un canal de comunicación es introduciendo la Relación Señal a Ruido (Signal to Noise Ratio- SNR) como un parámetro de sistema. Por lo general, la SNR mide el cociente entre la potencia media de la señal P y la potencia media del ruido σ^2 , ambas medidas en el mismo punto del sistema de comunicación.

$$SNR = \frac{P}{\sigma^2}. \quad (\text{B.1})$$

Habitualmente, la SNR se expresa en decibelios (dBs), definidos como 10 veces el logarítmico (en base 10) del valor expresado en unidades naturales. Por ejemplo, una relación señal a ruido de 10, 100 o 1000 corresponde a 10, 20 y 30dBs respectivamente. Podemos expresarlo matemáticamente con la expresión siguiente

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P}{\sigma^2}. \quad (\text{B.2})$$

La calidad de un sistema de comunicación digital, por lo general, viene medida en términos de la probabilidad de error de bit p_{err} , expresada como una función de la SNR en dBs.

B.2 El canal discreto binario simétrico

El canal binario simétrico es de gran interés teórico y de gran importancia práctica. Es un caso especial del canal discreto sin memoria en el que hay sólo dos símbolos de entrada ($x_0 = 0$ y $x_1 = 1$) y dos símbolos de salida ($y_0 = 0$, $y_1 = 1$). El canal es simétrico porque la probabilidad de recibir un 1 cuando un 0 es enviado es la misma que la probabilidad de recibir un 0 si un 1 es enviado. Esta probabilidad condicionada de error se denota como p . La Fig. B.1 muestra un diagrama de la probabilidad de transición en un canal binario simétrico. En estas condiciones, la información mutua $I = H(x) - H_y(x)$ puede ser descrita a través de la expresión siguiente

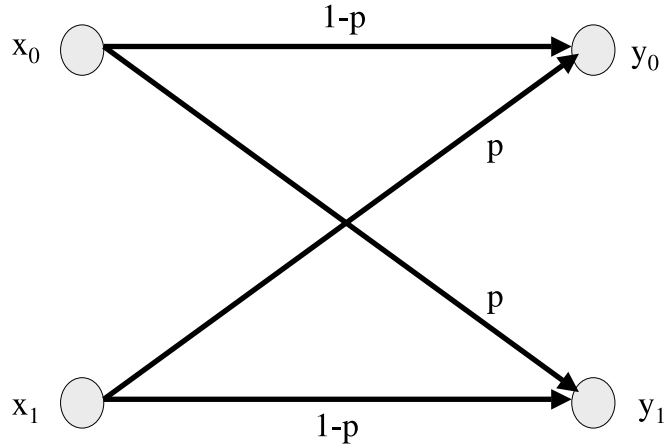


Figura B.1. Diagrama que muestra las probabilidades de transición de un canal binario simétrico.

$$I = \sum_k \sum_j p(x_j, y_k) \log \frac{p(y_k/x_j)}{p(y_k)}. \quad (\text{B.3})$$

Esta información mutua es maximizada cuando el canal tiene probabilidades $p(x_0) = p(x_1) = 0.5$. Entonces, substituyendo en la Ec.(B.3), podemos concluir que la capacidad de información del canal binario simétrico es

$$C = 1 + p \log p + (1 - p) \log(1 - p) \quad (\text{B.4})$$

Como puede ser observado, cuando el canal está libre de ruido $p = 0$ y la capacidad de canal C alcanza un valor máximo de un bit por símbolo, que es exactamente la información que entra al canal. Por otra parte, cuando la probabilidad condicional $p = 0.5$ debido al ruido, la capacidad de canal C toma su valor mínimo que es cero.

B.3 El filtro adaptado

El filtro adaptado es un filtro lineal diseñado para proporcionar a su salida la máxima relación señal a ruido posible para una forma de onda transmitida dada. Si consideramos una señal $s(t)$ conocida más un ruido aditivo blanco y Gaussiano, $\xi(t)$ que entran a un filtro lineal invariante seguido de un cuantificador, tal y como se muestra en la Fig. B.2. En el instante $t = T$, la salida de receptor, $z(T)$ consiste en una componente procedente de la señal a_i mas una componente procedente del ruido n_0 . La potencia media de ruido a la salida es denotada por σ_0^2 . Por tanto, la relación señal a ruido en el instante $t = T$ será $(S/N)_T$ y tomará un valor

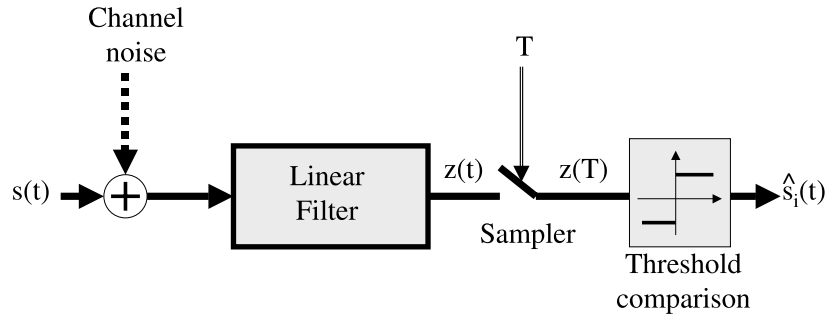


Figura B.2. Receptor básico para detección de señales digitales.

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{a_i}{\sigma_0^2} \quad (\text{B.5})$$

En esta situación, deseamos encontrar la función de transferencia del filtro, $H_0(f)$, que maximice la Ec.(B.5). Podemos expresar la señal, $a(t)$, a la salida del filtro, en términos de la función de transferencia del filtro, $H(f)$ (antes de la optimización), y de la transformada de Fourier de la señal de entrada como

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{-j2\pi ft} df, \quad (\text{B.6})$$

donde $S(f)$ es la transformada de Fourier de la señal de entrada, $s(t)$. Si la densidad espectral del ruido de entrada es $\frac{N_0}{2}$, entonces, usando la teoría de filtros lineales, podemos expresar la potencia de ruido a la salida, σ_0^2 , como

$$\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (\text{B.7})$$

Combinando las Ecs.(B.5-B.7) para expresar $(S/N)_T$, obtenemos

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}. \quad (\text{B.8})$$

A continuación hay que buscar el valor de $H(f) = H_0(f)$ para el cual la $(S/N)_T$ se hace máxima. Lo vamos a hacer usando la desigualdad de Schwarz. Una de las

formas en que podemos expresarla es

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 dx. \quad (\text{B.9})$$

La igualdad se alcanza si $f_1(x) = kf^*(x)$, donde k es una constante arbitraria y $*$ indica el complejo conjugado. Si identificamos $H(f)$ con $f_1(x)$ y $S(f)e^{j2\pi fT}$ con $f_2(x)$, podemos decir que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 dx. \quad (\text{B.10})$$

Substituyendo en la Ec.(B.8) obtenemos

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (\text{B.11})$$

o lo que es lo mismo

$$\max \left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{2E}{N_0}, \quad (\text{B.12})$$

donde la energía, E , de la señal de entrada $s(t)$ es

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df. \quad (\text{B.13})$$

Por tanto, el valor del máximo de $(S/N)_T$ depende la energía de la señal de entrada y la densidad espectral de potencia de ruido, pero no de la forma de la onda que estemos utilizando.

La igualdad en la Ec.(B.12) se alcanza solo si se utiliza un filtro, $H_0(f)$, con respuesta en frecuencia óptima que tiene una expresión

$$H(f) = H_0(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT}, \quad (\text{B.14})$$

es decir, cuando $h(t)$ es la transformada de Fourier inversa de $kS^*e^{-j2\pi fT}$. Dado que $s(t)$ es una función real, utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, podemos decir que

$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & \text{if } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

Por tanto, la respuesta al impulso del filtro que produce la máxima relación señal a ruido a la salida es la imagen especular de la señal del mensaje, $s(t)$, retrasada en la duración, T , del símbolo. Obsérvese que el retraso de T segundos hace que la ecuación Ec.(B.15) sea causal; es decir, el retardo de T segundos hace que $h(t)$ esté definida en instantes positivos, en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Sin el retardo de T segundos, la respuesta, $s(-t)$, sería irrealizable porque haría depender la respuesta de instantes de tiempo negativos.

B.3.1 Realización del filtro adaptado como un correlador

El término filtro adaptado es a menudo utilizado como sinónimo de integrador de producto o correlador. La Ec.(B.15) ilustra la propiedad básica de todo filtro adaptado: la respuesta al impulso del filtro es una versión retrasada de la imagen especular de la forma de onda de la señal. Por lo tanto, si la forma de onda de la señal es $s(t)$, su imagen especular es $s(-t)$, y la imagen especular retrasada en T segundos es $s(T - t)$. La salida, $z(t)$, de un filtro causal puede ser descrita en el dominio de tiempo como la convolución de la forma de onda de entrada recibida, $r(t)$, con la respuesta al impulso del filtro

$$z(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau) d\tau. \quad (\text{B.16})$$

Sustituyendo $h(t)$ en la Ec.(B.15) por $h(t - \tau)$ de la Ec.(B.16) y asignando un valor unitario a la constante k , obtenemos

$$z(t) = \int_0^t r(\tau)s[T - (t - \tau)] d\tau = \int_0^t r(\tau)s(T - t + \tau) d\tau. \quad (\text{B.17})$$

Cuando $t = T$, podemos escribir la Ec.(B.17) como

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau) d\tau \quad (\text{B.18})$$

La operación descrita en la Ec.(B.18) es una integral del producto de la señal recibida, $r(t)$, con una réplica de la forma de onda de la señal transmitida, $s(t)$ sobre la duración de un símbolo. A esta operación también se la conoce como la correlación de $r(t)$ con $s(t)$. Si imaginamos que la señal recibida, $r(t)$, es correlada con cada una de las señales de un conjunto dado, $s_i(t)$ ($i = 1, \dots, M$), utilizando un banco de M correladores, la señal $s_i(t)$ que tenga una correlación mayor con $r(t)$ es la señal que coincide con $r(t)$ de manera más apropiada. Por tanto, podemos usar esta característica para la detección óptima de señales

B.3.2 Comparación entre convolución y correlación

Es importante destacar que las salidas del correlador y del filtro adaptado sólo son iguales en el instante $t = T$. Para una entrada sinusoidal, la salida del correlador, $z(t)$, es aproximadamente una rampa lineal en $0 \leq t \leq T$. Sin embargo, la respuesta del filtro adaptado es aproximadamente una forma de onda sinusoidal modulada por una rampa en $0 \leq t \leq T$. La comparación se muestra en la Fig. B.3. Para comprender las semejanzas y diferencias entre el filtro adaptado y el correlador, lo primero que debemos plantearnos es cuál es la semejanza entre la operación de convolución y la de correlación. Con el correlador, simplemente multiplicamos dos señales y después las integramos (evaluamos el área bajo su curva producto). Por tanto, calculamos el grado de semejanza entre las dos formas de onda en un periodo.

Con la convolución, desplazamos una función sobre otra y calculamos una secuencia de correlaciones. El filtro adaptado, cuando se usa como demodulador, solamente utiliza la correlación al final de la duración del símbolo. Dado que la salida del correlador y la del filtro adaptado son idénticas en el instante $t = T$, ambos pueden usarse con este fin.

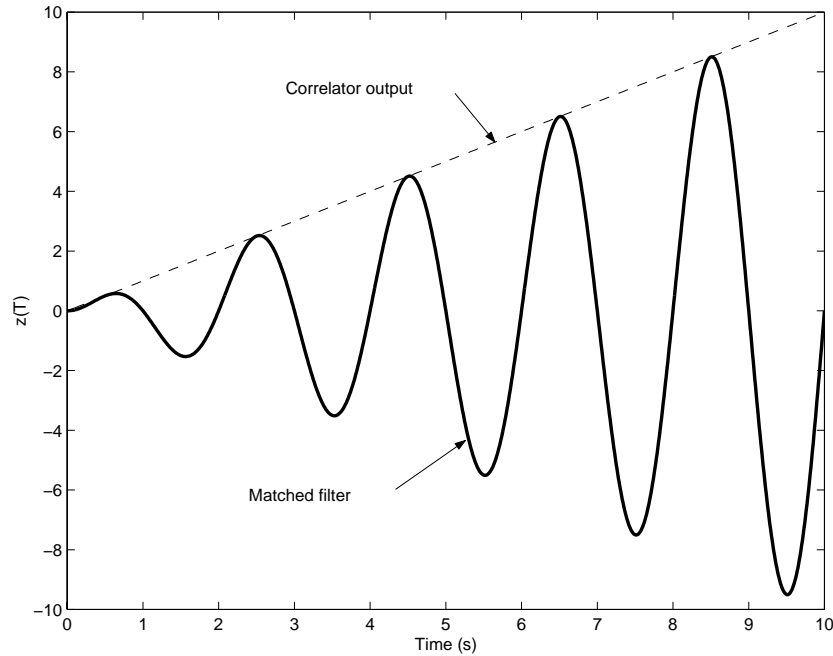


Figura B.3. Comparación de la respuesta de un correlador y de un filtro adaptado.

Bibliografía

- [1] M. Gell-Mann. *The Quark and the Jaguar: Adventures in the Simple and the Complex*. W. H. Freeman and Company, New York (1994).
- [2] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley Publishing Company, New York (1994).
- [3] A.-L. Barabási. *Linked, The New Science of Networks*. Perseus Publishing, Cambridge Massachusetts (2002).
- [4] C.E. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. The University of Illinois Press, Illinois (1949).
- [5] R. Badii, and A. Politi. *Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [6] S. Haykin. *Communication Systems* 4th Ed. John Wiley & Sons, New York (2001).
- [7] R.P. Feynman. *Lectures on Computation*. Addison-Wesley, New York (1996).
- [8] F. Moss, D. Pierson, D. O’Gorman. Stochastic Resonance: Tutorial and update. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **4** 1383 (1994).
- [9] M.E. Inchiosa, J.W.C. Robinson, A. Bulsara. Information-Theoretic Stochastic Resonance in Noise-Floor Limited Systems: The Case for Adding Noise. *Phys. Rev. Lett.* **85** 3369 (2000).
- [10] A.R. Bulsara, L. Gammaitoni. Tuning into Noise. *Physics Today* **49** 39 (1996).
- [11] L. Gammaitoni, M. Löcher, A. Bulsara, P. Hänggi, J. Neff, K. Wiesenfeld, W. Ditto, M.E. Inchiosa. Controlling Stochastic Resonance. *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574 (1999).
- [12] M I Dykman, R Mannella, P V E McClintock, N G Stocks. Stochastic resonance in bistable systems. *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606 (1990).
- [13] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci. Stochastic resonance in a bistable systems. *Phys. Rev. Lett.* **62** 349 (1989).

- [14] B. McNamara, K. Wiesenfeld and R. Roy, Observation of Stochastic Resonance in a ring laser, *Phys. Rev. Lett.* **60** 2626 (1988).
- [15] D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.G. Stocks. Stochastic Resonance in electrical circuits I. Conventional Stochastic Resonance. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **46** 1212 (1999).
- [16] D.G. Luchinsky, R. Mannella, P.V.E. McClintock, N.G. Stocks. Stochastic Resonance in electrical circuits II. Nonconventional Stochastic Resonance. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **46** 1205 (1999).
- [17] I.K. Kaufman, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, S.M. Soskin, N.D. Stein. High-frequency stochastic resonance in SQUIDS. *Phys. Lett. A.* **220** 219 (1996).
- [18] R. Bulsara. *Noise-Mediated Cooperative Behavior in Integrated-Fire Models of Neuron Dynamics, in Brain-like computing and intelligent information systems.* Springer, New York (1998).
- [19] J. Lindner, B. Meadows, T. Marsh, W. Ditto, A. Bulsara. Can a Neuron Distinguish Chaos from Noise?. *Int. J. Bifurc. Chaos* **8** 767 (1998).
- [20] A.R. Bulsara, T.C. Elston, C.R. Doering, S.B. Lowen, K. Lindenberg. Cooperative behavior in periodically driven noisy integrate-fire models of neuronal dynamics. *Phys. Rev. E* **53** 3958 (1996).
- [21] R.F. Fox. Stochastic resonance in a double well. *Phys. Rev.* **39A** 4148 (1989).
- [22] P. Jung, P. Hanggi. Stochastic nonlinear dynamics modulated by external periodic forces. *Europhys. Lett.* **8** 505 (1989).
- [23] J.J. Collins, C.C. Chow, A.C. Capela, T.T. Imhoff. Aperiodic stochastic resonance. *Phys. Rev. E.* **54** 5575 (1996).
- [24] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Stochastic Resonance in the Information Capacity of a Nonlinear Dynamical System. *Int. Journal Bif. and Chaos* **8** 581 (1998).
- [25] L. Kruglikov, H. Dertinger. Stochastic Resonance as a Possible Mechanism of Amplification of Weak Electric Signals in Living Cells. *Bioelectromagnetics* **15** 539 (1994).
- [26] A. N. Kolmogorov. A metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **119** 861 (1958).
- [27] D. Ruelle. *Chaotic Evolution and Strange Attractors.* Cambridge University Press, New York (1989).
- [28] L.M. Pecora, T.L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* **64** 821 (1990).

-
- [29] K. M. Cuomo, A.V. Oppenheim. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. *Phys. Rev. Lett.* **71** 65 (1993).
- [30] S. Hayes, C. Grebogi, E. Ott, A. Mark. Experimental control of chaos for communication. *Phys. Rev. Lett.* **73** 1781 (1994).
- [31] H. Dedieu, M.P. Kennedy, M. Hasler. Chaos shift keying: Modulation and demodulation of chaotic carrier using self-synchronizing Chua's circuits. *IEEE Transactions on Circuits Systems* **40** 634 (1993).
- [32] U. Parlitz, L.O. Chua, L.J. Kocarev, K.S. Halle, A. Shang. Transmission of digital signals by chaotic synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **2** 973 (1992).
- [33] C.W. Wu, L.P. Chua. A simple way to synchronize chaotic systems with applications to secure communication systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3** 1619 (1993).
- [34] E. Ott. *Chaos in dynamical systems* 2nd ED. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [35] S. Hayes. Communicating with Chaos. *Phys. Rev. Lett.* **70** 3031 (1993).
- [36] I.P. Mariño, E. Rosa, C. Grebogi. Exploiting the natural redundancy of chaotic signals in communication systems. *Phys. Rev. Lett.* **85** 2629 (2000).
- [37] E. Rosa, S. Hayes, C. Grebogi. Noise filtering in communication with chaos. *Phys. Rev. Lett.* **78** 1247 (1997).
- [38] M.S. Baptista. Cryptography with Chaos. *Phys. Lett. A* **240** 50 (1998).
- [39] E. Bollt, Y.-C. Lai, C. Grebogi. Coding, channel capacity and noise resistance in communication with chaos. *Phys. Rev. Lett.* **79** 378 (1997).
- [40] M.S. Baptista, E. Rosa, C. Grebogi. Communication through chaotic modeling of languages. *Phys. Rev. E*, **61** 3590 (2000).
- [41] B. Chen, G.W. Wornell. Analog Error-Correcting Codes Based on Chaotic Dynamical Systems. *IEEE Transactions on Communications* **46** 881 (1998).
- [42] X. Pei, K. Bachmann, F. Moss. The detection threshold, noise and stochastic resonance in the Fitzhugh-Nagumo neuron model. *Phys. Lett. A* **206** 61 (1995); S.M. Bezrukov, I. Vodyanoy. Stochastic resonance in non-dynamical systems without response thresholds. *Nature* **385** 319 (1997); D. Nozaki, D.J. Mar, P. Grigg, J.J. Collins. Effects of colored noise on stochastic resonance in sensory neurons. *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402 (1999).

- [43] A.R. Bulsara, T. Elston, C.R. Doering, S. Lowen, K. Lindenberg. Cooperative behavior in periodically driven noisy integrate-fire models of neuronal dynamics. *Phys. Rev. E* **53** 3958 (1996).
- [44] H.E. Plesser, T. Geisel. Markov analysis of stochastic resonance in a periodically driven integrate-and-fire neuron. *Phys. Rev. E* **59** 7008 (1999).
- [45] T. Shimokawa, K. Pakdaman, S. Sato. Time-scale matching in the response of a leaky integrate-and-fire neuron model in to periodic stimulus with additive noise. *Phys. Rev. E* **59** 3427 (1999).
- [46] S.R. Massanés, C.J.P. Vicente. Nonadiabatic resonances in a noisy Fitzhugh-Nagumo neuron model. *Phys. Rev. E* **59** 4490 (1999).
- [47] B. Lindner, L. Schimansky-Geier. Coherence and stochastic resonance in a two-state system. *Phys. Rev. E* **61** 6103 (2000).
- [48] T. Shimokawa, A. Rogel, K. Pakdaman, S. Sato. Stochastic resonance and spike-timing precision in an ensemble of leaky integrate and fire neuron models. *Phys. Rev. E* **59** 3461 (1999).
- [49] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni. Stochastic Resonance. *Rev. Mod. Phys.* **70** 223 (1998); F. Moss, D. Pierson, D.O'Gorman. Stochastic Resonance: Tutorial and update. *Int. J. Bifurcation and Chaos Appl. Sci. Eng.* **4** 1383 (1994).
- [50] P. Lansky. Sources of periodical force in noisy integrate-and-fire models of neuronal dynamics. *Phys. Rev. E* **55** 2040 (1997).
- [51] H.E. Plesser, PhD-Thesis, chapter 2.1. Universität Göttingen Göttingen (1999).
- [52] B. Lindner, L. Schimansky-Geier. Transmission of noise coded versus additive signals through a neuronal ensemble. *Phys. Rev. Lett.* **86** 2934 (2001).
- [53] M. I. Dykman, D.G. Luchinsky, P.V.E. McClintock, N.D. Stein, N.G. Stocks. Stochastic resonance for periodically modulated noise intensity. *Phys. Rev. A* **46** R1713 (1992).
- [54] N. Brunel. Dynamics of sparsely connected networks of excitatory and inhibitory spiking neurons. *J. Comput. Neurosci.* **8** 183 (2000).
- [55] J. Feng, B. Tirozzi. Stochastic resonance tuned by correlations in neuronal models. *Phys. Rev. E* **61** 4207 (2000).
- [56] J.E. Tomberg, K.K.K. Kaski. Pulse-density modulation technique in VLSI implementation of neural network algorithms. *IEEE J. Solid-State Circuits* **25** 1277 (1990).

-
- [57] Y. Ota, B.M. Wilamowski. Analog implementation of Pulse-Coupled Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* **10** 539 (1999).
- [58] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, R. Toral. Noise-induced nonequilibrium phase transition. *Phys. Rev. Lett.* **73** 3395 (1994).
- [59] A. Zaikin, K. Murali, J. Kurths. A Simple Electronic Circuit Model for Doubly Stochastic Resonance. *Phys. Rev. E* **63** 020103(R) (2001).
- [60] W. Horsthemke, R. Lefever. *Noise-induced transitions*. Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [61] A. Schenzle, H. Brandt. *Phys. Rev. A* **20** 1628 (1979).
- [62] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [63] R. Graham, A. Schenzle. Carleman imbedding of multiplicative stochastic processes. *Phys. Rev. A* **25** 1731 (1982).
- [64] *Noise in nonlinear dynamical systems*. Ed. F. Moss and P.V.E. McClintock. Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [65] A.S. Mikhailov. Selected topics in fluctuational kinetics of reactions. *Phys. Rep.* **184** 307 (1989).
- [66] L. Schimansky-Geier, Ch. Zulicke. *Z. Phys. B* **82** 157 (1991).
- [67] M.O. Magnasco. Forced thermal ratchets. *Phys. Rev. Lett.* **71** 1477 (1993).
- [68] *Instabilities and chaos in quantum optics II*. Ed. N.B. Abraham, F.T. Arecchi, L.A. Lugiato. Plenum, New York (1988).
- [69] C. Doering, C. Gadoua. Resonant Activation over a Fluctuating Barrier. *Phys. Rev. Lett.* **69** 2138 (1992).
- [70] J. García-Ojalvo, J.M. Sancho. *Noise in spatially expended systems*. Springer, New York (1999).
- [71] C. Van den Broeck, J.M.R. Parrondo, R. Toral, R. Kawai. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise. *Phys. Rev. E* **55** 4084 (1997).
- [72] C. Van den Broeck. *Stochastic Dynamics*. Springer, Heidelberg (1997).
- [73] A. Zaikin, J. García-Ojalvo, L. Schimansky-Geier. Nonequilibrium first-order transition induced by additive noise. *Phys. Rev. E* **60** R6275 (1999).
- [74] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *J. Phys. A* **14** L453 (1981).

- [75] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni. Stochastic Resonance. *Rev. Mod. Phys.* **70** 223 (1998).
- [76] J. Douglass, L. Wilkens, L. Pantazelou, F. Moss. Stochastic resonance: Noise-enhanced information transfer in crayfish mechanoreceptors. *Nature* **365** 337 (1993).
- [77] K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss. Stochastic Resonance on a Circle. *Phys. Rev. Lett.* **72** 2125 (1994).
- [78] H. Gang, T. Ditzinger, C. Ning, H. Haken. Stochastic Resonance without external periodic force. *Phys. Rev. Lett.* **71** 807 (1993).
- [79] S.M. Bezrukov, I. Vodyanoy. Stochastic resonance in non-dynamical systems without response thresholds. *Nature* **385** 319 (1997).
- [80] S. Sinha. Noise-free stochastic resonance in simple chaotic systems. *Physica A* **270** 204 (1999).
- [81] P. Landa, P. McClintock. Vibrational Resonance. *J. Phys. A* **33** L433 (2000).
- [82] J. Rayleigh. *The theory of sound*. Macmillan, London, (1894).
- [83] D. Su, M. Chiu, C. Chen. Simple two-frequency laser. *Precis. Eng.* **18** 161 (1996).
- [84] A. Maksimov. *Ultrasonics* **35** 79 (1997).
- [85] J. Victor, M. Conte. *Visual Neurosci.* Two-frequency analysis of interactions elicited by vernier stimuli. **17** 959 (2000).
- [86] V. Gherm, N. Zernov, B. Lundborg, A. Vastberg, J. Atmos. The two-frequency coherence function for the fluctuating ionosphere; narrowband pulse propagation. *Sol.-Terr. Phys.* **59** 1831 (1997).
- [87] E.R. Kandel, J.H. Schwartz, T.M. Jessell. *Neurociencia y conducta*. Prentice-Hall, Madrid (1997).
- [88] E. R. Dougherty. *An Introduction to Morphological Image Processing*. Tutorial Texts in Optical Engineering, Vol. TT 9, SPIE Optical Engineering Press (1992).
- [89] E.M. Izhikevich. Class 1 neural excitability, conventional synapses, weakly connected networks and mathematical foundations of pulse-coupled models. *IEEE Transactions on Neural Networks* **10** 499 (1999).
- [90] O. Sporns, G. Tononi, G.M. Edelman. Theoretical neuroanatomy: relating anatomical and functional connectivity in graphs and cortical connection matrices. *Cereb. Cortex* **10** 127 (2000).

- [91] C. Cherniak. Component placement optimization in the brain. *J. Neurosci.* **14** 2418 (1994).
- [92] D. Golomb, D. Hansel. The number of synaptic inputs and the synchrony of large, sparse neuronal networks. *Neural Comput.* **12** 1095 (2000).
- [93] T.B. Achacoso, W.S. Yamamoto. *Neuroanatomy of C. elegans for Computation*. CRC Press, Boca Raton (1992).
- [94] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos. On power-law relationships of the Internet topology. *Comp. Comm. Rev.* **29** 251 (1999).
- [95] L. Adamic, *The small world web*. Lect. Notes Comput. Sci. 1696 443. Springer, New York, (1999).
- [96] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajalopagan, R. Stata, A. Tomkins, J. Wiener. Graph structure in the Web. *Comput. Netw.* **33** 309 (2000).
- [97] A. Kirman, C. Oddou, S. Weber. Stochastic Communication and Coalition Formation. *Econometrica* **54** 129 (1986).
- [98] R. Albert, A.-L. Barabási. Dynamics of Complex Systems: Scaling Laws for the Period of Boolean Networks. *Phys. Rev. Lett.* **84** 5660 (2000).
- [99] A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A* **281** 2115 (2000).
- [100] M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E* **64** 026118 (2001).
- [101] M.E.J. Newman. Scientific collaboration networks. Network construction and fundamental results. *Phys. Rev. E* **64** 016131 (2001); M.E.J. Newman. Scientific collaboration networks. Shortest paths, weighted networks, and centrality. *Phys. Rev. E* **64** 016132 (2001); M.E.J. Newman. The structure of the scientific collaboration networks. *PNAS* **98** 404 (2001).
- [102] M.E.J. Newman. Clustering and preferential attachment in growing networks. *Phys. Rev. E* **64** 025102(R) (2001).
- [103] L.A.N. Amaral, A. Scala, M. Barthélémy, H.E. Stanley. Classes of small-world networks. *PNAS* **97** 11149 (2000).
- [104] R. Albert, A.-L. Barabási. Statistical Mechanics of Complex Networks. *Rev. Mod. Phys.* **74** 47 (2002).
- [105] D.J. Watts, S.H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature* **393** 440 (1998).
- [106] D.J. Watts. *Small Worlds*. Princeton University Press, Princeton (1999).

- [107] P. Erdős, A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math Inst. Hung. Acad. Sci* **5** 17 (1960).
- [108] F. Liljeros, C.R. Edling, L.A.N. Amaral, H.E. Stanley, Y. Aberg. The Web of Human Sexual Contacts. *Nature* **411** 907 (2001).
- [109] S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today* **2** 60 (1967).
- [110] C. Korte, S. Milgram. Acquaintance linking between racial groups: Application of the small world method. *Journal of Personality and Social Psychology* **15** 101 (1970).
- [111] F. Ball, J. Mollison, G. Scalia-Tomba. Epidemics with two levels of mixing. *Ann. Appl. Probab.* **7** 46 (1997).
- [112] M.J. Keeling. The effects of local spatial structure on epidemiological invasions. *Proc. R. Soc. Lond. B* **266** 859 (1999).
- [113] M. Boots, A. Sasaki. Small Worlds and the evolution of virulence: infection occurs locally and at a distance. *Proc. R. Soc. Lond. B* **266** 1933 (1999).
- [114] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature* **406** 378 (2000).
- [115] L. Katz. A new status index derived from sociometric analysis. *Psychometrika* **18** 39 (1953).
- [116] F.R.K. Chung. Diameters of communication networks, in *Mathematics of Information Processing. Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 34*, 1-18. American Mathematical Society, Providence (1986).
- [117] R.I.M. Dunbar. Coevolution of neocortical size, group size and language in humans. *Behavioral and Brain Sciences* **16** 681 (1993).
- [118] M. Gladwell. *The Tipping Point. How little things can make a big difference*. Little Brown & Company, Boston, (2000).
- [119] N.E. Friedkin. Theoretical foundations for centrality measures. *Am. J. Sociol.* **96** 1478 (1991).
- [120] S.M. Maurer, B.A. Huberman. Competitive Dynamics of Web Sites. arXiv:nlin.CD/0003041 (2000).
- [121] L.A. Adamic, B.A. Huberman. The Nature of Markets on the World Wide Web. *Q.J. Electron. Commerce* **1** 5 (2000).
- [122] L.A. Adamic, B.A. Huberman. Power-law distribution of the World Wide Web. *Science* **287** (2000).

-
- [123] S. Solomon. Generalized Lotka-Volterra (GLV) models, in *Applications of Simulations to Social Sciences*. Hermes Science Publications, Paris (2000).
- [124] R.H. Frank, P.J. Cook. *The Winner-take-all Society*. Free Press, New York (1995).