

Information et réseaux complexes dans la société

Luis López et Miguel A. F. Sanjuán

*Grupo de Dinámica No Lineal y Teoría del Caos
Departamento de Matemáticas y Física Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza
Universidad Rey Juan Carlos
Tulipán s/n, 28933 Móstoles (Madrid), Espagne
llopez@escet.urjc.es*

Résumé

Dans le contexte des réseaux complexes, un modèle est développé pour les réseaux sociaux avec la propriété qu'il y ait une certaine dégradation de l'information qui traverse les réseaux. Différentes topologies d'interconnexion sont analysés et un degré de coordination moyen qui peut être associé avec une notion d'efficacité est défini. En acceptant qu'il y ait une limite pour l'information qu'une personne peut contrôler, on montre qu'il existe une relation étroite entre la structure du réseau et sa taille maximale.

1 Introduction

L'étude et la caractérisation des systèmes complexes par l'utilisation des réseaux constitue de nos jours un sujet de recherche d'une activité importante, où il existe une multitude de problèmes intéressants non résolus. Dans ce domaine, la théorie des graphes et l'analyse des réseaux jouent un rôle exceptionnel et pour cette raison, elles gagnent une grande popularité due à leur capacité à réduire un système à ses composants et relations simples. C'est peut-être ce pouvoir réductionniste qui permet à la caractérisation des réseaux d'être présente dans différentes disciplines scientifiques et technologiques comme dans la neurobiologie [1], l'Internet [2], le WWW [3, 4], l'économie [5], etc...

De plus, des nombreux physiciens ont centré leurs intérêts de recherche sur les réseaux complexes, comme le démontrent les multiples articles parus ces dernières années dans la littérature [6, 7, 8]. La plupart des récents efforts réalisés en relation avec les réseaux complexes a été synthétisé dans l'excellent article [9]. Parmi les réseaux complexes, les réseaux sociaux apparaissent de façon naturelle et comme dans n'importe quel autre système complexe, ils peuvent être analysés dans le cadre de la théorie des graphes [8, 10]. Un graphe G se compose d'un ensemble non vide d'éléments, nommés sommets, et d'une liste de paires non ordonnées de ces éléments dénommées arêtes. Si i et j sont des sommets de G , alors on dit qu'une arête de la forme de (i, j) , unit i à j . De nombreux systèmes complexes intéressants sont construits avec des composants simples qui maintiennent des relations entre eux. La représentation graphique de ces systèmes est directe, simplement en considérant que chaque composant simple est un sommet et que chaque relation est une arête. Toute structure sociale est composée de différents types d'éléments comme les êtres humains, les groupes de personnes, les nations, etc., qui sont reliés selon un ensemble de règles qui définissent l'existence et le degré de leurs relations. Un exemple très connu de réseau social est le jeu de Kevin Bacon développé par Brett Tjaden et étudié par Watts [11] dans le contexte du phénomène *small world*. Dans ce modèle, chaque acteur ou actrice

se considère comme le sommet d'un graphe, deux sommets sont reliés par une arête seulement si tous les deux ont participé à un même film. Un autre exemple intéressant a été développé par Newman [8] étudiant les réseaux de la collaboration scientifique. Dans ce cas, chaque sommet du graphe représente le détail d'un auteur scientifique, deux auteurs sont unis quand ils ont participé au moins à un même article ensemble. D'autres exemples sont liés au réseau des contacts sexuels humains [12] et au phénomène *small world* [13, 14]. Par conséquent, en utilisant seulement deux ingrédients: les éléments, représentés par les sommets, et les relations, représentées par les arêtes, il est possible de définir n'importe quelle classe de structure sociale. Ici, nous sommes particulièrement intéressés par l'étude des réseaux de collaboration qui surgissent dans les communautés ou les organismes humains. En se servant de ces techniques, notre objectif est de développer un modèle pour le flux d'information dans les réseaux sociaux. En utilisant ce modèle, nous allons analyser comment la topologie d'un réseau est intimement liée aux propriétés essentielles de celle-ci comme l'efficacité, la taille maximale, etc.

2 Le flux d'information dans la société

Traditionnellement, la recherche dans la théorie des graphes a été concentrée en analysant comment les propagations de l'information d'un sommet au repos, en considérant que l'information peut voyager par les bords sans subir aucun processus de dégradation. Cette approche a été utile à l'heure de modéliser certains phénomènes comme la propagation des maladies dans la communauté [15, 16], où l'infection du virus et de la propagation des erreurs dans les réseaux d'ordinateurs [17]. Néanmoins, nous allons voir que cette vision n'est pas appropriée pour la propagation d'information dans les réseaux sociaux.

L'expérience nous montre que l'information obtenue d'une personne dépend en grande partie du degré de relation qui reste avec cet individu en particulier. En effet, nous voulons représenter les relations sociales par les bords non pesés et non dirigés, nous avons défini le degré de relation entre deux personnes comme la distance, en nombre des sauts, entre les deux sommets. Ainsi, si nous sommes reliés dans le premier ordre à une personne en particulier, nous pourrions facilement en obtenir beaucoup de données. Si nous pensons à une relation du deuxième ordre, par exemple à un ami d'un de nos amis, la quantité d'information que nous pouvons recevoir est inférieure à celle d'un de nos amis plus proches et ainsi de suite.

Dans l'objectif de créer un modèle approprié de cette situation, nous avons défini une quantité que nous avons appelée *degré de coordination*. Le degré de coordination mesure la capacité des sommets dans un graphe afin d'échanger l'information. Une des méthodes les plus simples pour définir ce concept est celle de considérer que le degré de coordination est exponentiellement lié à la distance entre les sommets. De cette façon, nous avons défini le degré γ_{ij} de coordination entre deux sommets i et j comme

$$\gamma_{ij} = e^{-\xi d_{ij}}, \quad (1)$$

où d_{ij} est la distance entre les deux sommets et ξ est une constante positive, qui mesure la force de la relation que nous allons appeler *force de coordination*. Il est important de commenter qu'il est possible de considérer une force de coordination différente pour chaque bord du graphe, mais ceci mènerait aux graphes pondérés, que nous ne considérons pas ici. Par conséquent, comme une première approche, ξ est considéré constant pour chaque graphe en particulier.

En acceptant ces hypothèses, nous pouvons définir le degré de coordination d'un sommet d'un graphe comme la somme de tous les degrés de coordination entre ce sommet i particulier et le reste

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij}, \quad (2)$$

où N est l'ordre du graphe (le nombre total de sommets dans ce graphe). Cette définition inclut le degré de coordination d'un noeud avec lui même. En utilisant la Ec.(1) le degré de coordination d'un noeud avec lui même doit être égal à un, parce que la distance d_{ii} du noeud est elle même zéro, et par conséquent $\gamma_{ii} = e^{-\xi d_{ii}} = e^0 = 1$. Le degré total de coordination d'un sommet est la moyenne de la quantité d'information que le sommet est capable de recevoir pour appartenir à ce réseau particulier.

De cette façon, nous définissons le *degré de coordination totale* d'un graphe comme la somme totale des degrés de coordination de tous les sommets appartenant à ce graphe.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i. \quad (3)$$

Le degré de coordination total d'un graphe est la moyenne de la quantité d'information qui s'écoule dans une organisation. Plus intéressant que le degré de coordination total d'un graphe est le *degré de coordination moyen* du graphe, que nous définissons comme le degré de coordination total divisé par son ordre

$$\bar{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{N}. \quad (4)$$

Cela nous permet de faire une interprétation intéressante du degré de coordination moyen d'un graphe comme une moyenne de l'efficacité d'une communauté ou organisation, ce qui nous amène aussi à savoir avec quelle quantité d'information l'individu contribue à la communauté.

3 Structure et efficacité dans les organisations

Une fois le degré de coordination moyen défini, il serait important de chercher comment la structure et la taille des organisations sont reliés. Dans cette direction, nous allons commencer à faire des recherches sur les propriétés d'une des topologies de l'interconnexion les plus paradigmatiques: les réticules régulières bidimensionnelles. Si nous assumons que le degré du réseau est $c = 4$, le degré de coordination moyen sera

$$\Gamma_i = 1 + 4 \sum_{j=1}^n j e^{-j\xi}, \quad (5)$$

où $2n^2 + 2n + 1 = N$, étant N l'ordre du graphe. Pour une réticule régulière infinie ($N \rightarrow \infty$), cette expression peut être évaluée comme dérivée d'une progression géométrique, en prenant une valeur

$$\Gamma_i = 1 + \frac{4e^{-\xi}}{(1 - e^{-\xi})^2}. \quad (6)$$

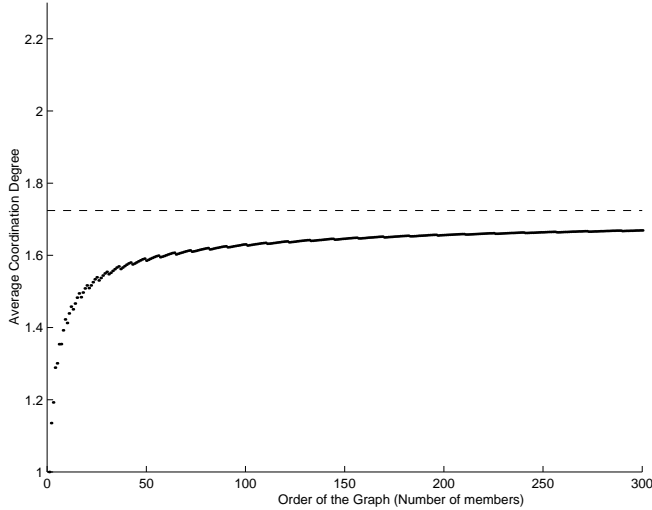


FIG. 1 – Degré de coordination moyen $\bar{\Gamma}$, pour une réticule régulière $2d$ avec $k = 4$ and $\xi = 2$. La ligne droite représente la limite Γ_∞ .

Cette expression indique que l'information qu'un sommet appartenant à ce réseau reçoit n'augmente pas de façon proportionnelle à la taille de celle-ci, sinon tend à saturer à une valeur asymptotique finie. Ce qui nous conduit, en termes sociologiques à une interprétation intéressante. L'efficacité qui peut être vue comme le degré de coordination moyen, ne montre pas d'augmentation considérable une fois que l'organisation atteint une certaine taille. Cette conclusion peut s'extrapoler dans de multiples topologies d'interconnexion telle que les réseaux *small world*, certaines configurations de graphes aléatoires et hiérarchiques, etc. Cependant, d'autres topologies existent dans lesquelles la quantité d'information peut diverger comme par exemple dans un graphe parfaitement expansif, où on peut démontrer que le degré de coordination moyen prend la valeur:

$$\bar{\Gamma} = 1 + ce^{-\xi} \sum_{j=0}^m (c-1)^j e^{-j\xi}, \quad (7)$$

où m est le nombre de niveaux et vérifie $N = 1 + c((c-1)^{m+1} - 1)/(c-2)$. C'est simple de comprendre que si $N \rightarrow \infty$, cette série diverge toujours quand $(c-1)e^{-\xi} \geq 1$.

3.1 La limite 150

En relation avec la discussion précédente, il est intéressant de constater que certains scientifiques proposent l'existence d'une limite naturelle pour le nombre maximum de membres en groupes et organisations sociales. Probablement le travail le plus important dans cette direction est celui réalisé par l'anthropologue britannique R. Dunbar [18, 19], qui a rapporté que la taille du neocortex (une partie du cerveau relié avec les capacités sociales et linguistiques) a un rapport avec la taille maximum du groupe dans les primates. En appliquant cette relation pour l'Homo Sapiens, on a estimé que la taille maximale du groupe est de 147.8, c'est à dire, approximativement 150.

Les résultats de Dunbar semblent indiquer qu'il existe une limite psychologique de la quantité d'information qu'un individu est capable de traiter. Pour autant, lorsque cette

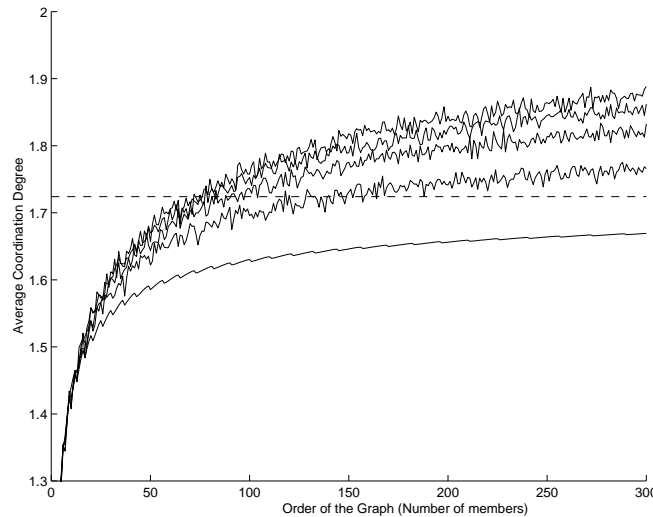


FIG. 2 – Degré de coordination moyen $\bar{\Gamma}$, pour des réseaux small world $2d$ avec $k = 4$ et $\xi = 2$. La ligne droite représente la limite Γ_{∞} .

limite est dépassée, la communauté doit être divisée pour qu'il ne se produise pas de saturation de cette capacité. Bien que cet argument soit très raisonnable, il échoue au moment d'expliquer comment il est possible qu'ils existent des organisations sociales avec un nombre de membres bien supérieur aux 150 individus. Il n'échappe à personne qu'ils existent des sociétés avec des dizaines de milliers d'employés qui ne semblent pas souffrir du symptôme de saturation. La réponse à cette inconnue peut se trouver dans notre modèle de transfert d'information.

Le problème de Dunbar est d'essayer de relier une propriété de réseau (la taille) avec une caractéristique de ses membres (limite psychologique) sans tenir compte que la topologie d'interconnexion peut jouer un rôle essentiel. Tel que nous l'avons vérifié, ils existent des réseaux dans lesquels l'information reçue par l'individu se sature et ne dépasse pas certaine limite finie indépendamment de la taille de la communauté. Cependant, il existe d'autres topologies pour lesquelles la quantité d'information augmente au fur et à mesure que le réseau augmente. En utilisant ces arguments, il est plausible que les topologies d'interconnexion les plus habituelles atteignent la limite psychologique de Dunbar en une valeur proche des 150 individus, alors que d'autre type de topologies moins optimistes font que la taille du réseau peut grandir de façon arbitraire sans atteindre cette limite.

4 Conclusion

Dans tous les cas, l'analyse réalisée ici montre que la taille d'une organisation ne peut être comprise seulement en termes de propriétés psychologiques de ses membres comme l'a proposé Dunbar. La structure et les propriétés de transfert de l'information du réseau peuvent aussi jouer un rôle définitif dans ce sens.

Remerciements

Nous sommes reconnaissants pour l'aide financière du Ministère de la Science et de la Technologie de l'Espagne sous le projet BFM2000-0967, et de l'Université Rey Juan Carlos sous les projets URJC-PGRAL-2001/02 et URJC-PIGE-02-04.

Références

- [1] T.B. Achacoso, W.S. Yamamoto. *Neuroanatomy of C. elegans for Computation*. CRC Press, Boca Raton (1992).
- [2] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos. On power-law relationships of the Internet topology. *Comp. Comm. Rev.* **29** 251 (1999).
- [3] L. Adamic, *The small world web* Lect. Notes Coput. Sci. Springer, New York (1999).
- [4] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajalopagan, R. Stata, A. Tomkins, J. Wiener. Graph structure in the Web. *Comput. Netw.* **33** 309 (2000).
- [5] A. Kirman, C. Oddou, S. Weber. Stochastic Communication and Coalition Formation. *Econometrica* **54** 129 (1986).
- [6] A.-L. Barabási, R. Albert, H. Jeong. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A* **281** 2115 (2000).
- [7] M.E.J. Newman, S.H. Strogatz, D.J. Watts. Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Phys. Rev. E* **64** 026118 (2001).
- [8] M.E.J. Newman. Scientific collaboration networks. Network construction and fundamental results. *Phys. Rev. E* **64** 016131 (2001); M.E.J. Newman. Scientific collaboration networks. Shortest paths, weighted networks, and centrality. *Phys. Rev. E* **64** 016132 (2001); M.E.J. Newman. The structure of the scientific collaboration networks. *PNAS* **98** 404 (2001).
- [9] R. Albert, A.-L. Barabási. Statistical Mechanics of Complex Networks. *Rev. Mod. Phys.* **74** 47 (2002).
- [10] D.J. Watts, S.H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature* **393** 440 (1998).
- [11] D.J. Watts. *Small Worlds*. Princeton University Press, Princeton (1999).
- [12] F. Liljeros, C.R. Edling, L.A.N. Amaral, H.E. Stanley, Y. Aberg. The Web of Human Sexual Contacts. *Nature* **411** 907 (2001).
- [13] S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today* **2** 60 (1967).
- [14] C. Korte, S. Milgram. Acquaintance linking between racial groups: Application of the small world method. *Journal of Personality and Social Psychology* **15** 101 (1970).
- [15] F. Ball, J. Mollison, G. Scalia-Tomba. Epidemics with two levels of mixing. *Ann. Appl. Probab.* **7** 46 (1997).
- [16] M.J. Keeling. The effects of local spatial structure on epidemiological invasions. *Proc. R. Soc. Lond. B* **266** 859 (1999).
- [17] R. Albert, H. Jeong, A.-L. Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature* **406** 378 (2000).
- [18] R.I.M. Dunbar. Coevolution of neocortical size, group size and language in humans. *Behavioral and Brain Sciences* **16** 681 (1993).
- [19] M. Gladwell. *The Tipping Point. How little things can make a big difference*. Little Brown & Company, Boston, (2000).